

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

THAIS MARIANE BIEMBENGUT FARIA

IDENTIFICAÇÃO DE REGIÕES DE QUASE RUÍDO BRANCO EM
ESTRUTURAS DE ORDEM AUTOREGRESSIVA E MÉDIAS MÓVEIS COM
 $P + Q > 2$ E APLICAÇÃO DO BOOTSTRAP

CURITIBA

2014

THAIS MARIANE BIEMBENGUT FARIA

IDENTIFICAÇÃO DE REGIÕES DE QUASE RUÍDO BRANCO EM
ESTRUTURAS DE ORDEM AUTOREGRESSIVA E MÉDIAS MÓVEIS COM
 $P + Q > 2$ E APLICAÇÃO DO BOOTSTRAP

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia, pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia e Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Anselmo Chaves Neto

CURITIBA

2014

TERMO DE APROVAÇÃO

THAIS MARIANE BIEMBENGUT FARIA

IDENTIFICAÇÃO DE REGIÕES DE QUASE RUÍDO BRANCO EM
ESTRUTURAS DE ORDEM AUTOREGRESSIVA E MÉDIAS MÓVEIS COM
 $P + Q > 2$ E APLICAÇÃO DO BOOTSTRAP

Tese aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor no Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, do Departamento de Matemática, Setor de Ciências Exatas e do Departamento de Construção Civil, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Anselmo Chaves Neto
Departamento de Estatística, UFPR

Banca Examinadora: Prof. Dr. Jair Mendes Marques
PPGMNE, UFPR

Prof. Dr. Nelson Hein
Departamento de Matemática, FURB

Prof. Dr. Reinaldo Castro Souza
Departamento de Engenharia Elétrica, PUC-RIO

Prof. Dr. Sebastião de Amorim
Departamento de Estatística, Unicamp

Curitiba, 25 de abril de 2014.

A minha família, que me incentivou e apoiou incondicionalmente na realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha família que apoiou a realização deste curso e, proporcionou condições para que este trabalho fosse realizado.

Ao professor Nelson Hein, pela orientação na escolha deste programa de pós-graduação e pela ajuda na elaboração do projeto inicial de tese.

Ao professor Anselmo Chaves Neto, por me apontar novas diretrizes, e pela orientação eficiente e segura que permitiu a continuação de sua tese de doutorado.

Aos professores Sebastião Amorim e Reinaldo Castro, pela valiosa análise realizada no exame de qualificação. Por apontar erros e sugerir mudanças que enriqueceram e permitiram a conclusão desta pesquisa.

A minha amiga Simone Miloca que me ajudou nas disciplinas iniciais do curso, e ensinou a linguagem latex.

Aos especiais amigos Sandro Rodrigues e Fabio Balbo, que ajudaram na instalação e utilização de alguns programas computacionais, além da solução de problemas em várias etapas na execução da tese.

Aos colegas Tatiane, Rosilei, Vanessa, Flavia, Paula, Guilherme, Marina, Zau-dir, Rômulo e Adriano pela amizade e companheirismo durante muitos momentos do curso.

Aos secretários do programa, Maristela e Jair que sempre resolveram problemas de forma rápida e eficiente.

Ao programa Reuni/Capes pelo apoio financeiro.

RESUMO

Em problemas de inferência estatística, muitas vezes não se conhece a distribuição dos estimadores ou ainda essa distribuição é aproximadamente assintótica. O método *Bootstrap* pode ser empregado para obter uma aproximação da distribuição verdadeira de estatísticas de interesse e assim avaliar sua variabilidade, também possibilita a construção de intervalos de confiança e testes de hipóteses. O *Bootstrap* pode ser utilizado nas fases de identificação da estrutura dos modelos ARIMA(p,d,q) da Metodologia Box & Jenkins para séries temporais. Nessas etapas devem ser estimados alguns parâmetros, porém as expressões clássicas usadas para medir a variabilidade de seus estimadores são obtidas de forma aproximada, e a distribuição das estatísticas é geralmente assintótica. Desta forma, os intervalos de confiança tradicionais usados na estimação dos parâmetros são aproximados e possuem baixo desempenho, principalmente na fase da identificação de modelos cujos parâmetros pertencem à região do espaço paramétrico denominada “Quase Ruído Branco” (Neto Chaves, 1991). Neste trabalho, foi determinada a região do espaço paramétrico de “Quase Ruído Branco” dos modelos AR(3), MA(3), ARMA(2,1) e ARMA(2,2) pertencentes às estruturas ARIMA (p,d,q). O *Bootstrap* foi aplicado em séries temporais sintéticas dos modelos citados, com os parâmetros situados na região de “Quase Ruído Branco” e fora dela. Desta forma foram obtidas as distribuições de estimadores, necessários nas fases de identificação do modelo. Também foram avaliadas, além das estimativas pontuais, as probabilidades de cobertura dos intervalos de confiança *Bootstrap* em comparação com os intervalos clássicos, bem como o desvio padrão das estatísticas obtidas pelo método. Os resultados apontaram que o desempenho do *Bootstrap* é melhor do que do método clássico, sobretudo em amostras de menor tamanho, e com séries temporais simuladas a partir de modelos com parâmetros na região de “Quase Ruído Branco”.

Palavras-chave: *Bootstrap*, Séries Temporais, Quase Ruído Branco.

ABSTRACT

In problems of statistical inference, often do not know the distribution of estimators or this asymptotic distribution is approximately. The *Bootstrap* method can be used to obtain an approximation of the true distribution of statistics of interest and thus assess its variability, and also allows the construction of confidence intervals and hypothesis testing. *Bootstrap* can be used to identify the structure of the ARIMA(p, d, q) models for time series. In Box & Jenkins's models identification some parameters must be estimated, but the classical expressions used to measure the variability of estimators are obtained approximately, and distribution of statistics is usually asymptotic. Thus, the traditional confidence intervals used in the estimation of the parameters are approximate and have low performance, especially at the stage of identifying models whose parameters belong to the parameter space called "Quasi White Noise" (Neto Chaves, 1991). In this work, the region of parameter space of "Quasi White Noise" of AR (3), MA (3), ARMA (2,1) and ARMA (2,2) models was determined. *Bootstrap* was applied to synthetic time series models cited, with parameters located in the region of "Quasi White Noise" and beyond. Thus the distribution estimators needed to identify the phases of the model were obtained. Were also assessed, in addition to point estimates, the probability of coverage of *Bootstrap* confidence intervals compared to the classical intervals, and the standard deviation of the statistics obtained by the method. The results showed that the performance of the *Bootstrap* is better than the classical method, especially in a smaller sample size, and time series simulated from models with parameters in the region of "Quasi White Noise".

Key-words: *Bootstrap*, Times Series, Quasi White Noise.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – ESTACIONARIDADE AR(1)	20
FIGURA 2 – ESTACIONARIDADE AR(2)	21
FIGURA 3 – ESTACIONARIDADE AR(3)	21
FIGURA 4 – ALGORITMO DE MARQUARDT	32
FIGURA 5 – PERIODOGRAMA PARA OS RESÍDUOS	35
FIGURA 6 – ALGORITMO <i>BOOTSTRAP</i>	38
FIGURA 7 – QUASE RUÍDO BRANCO - AR(1)	45
FIGURA 8 – QUASE RUÍDO BRANCO - AR(2)	45
FIGURA 9 – QUASE RUÍDO BRANCO - MA(1)	46
FIGURA 10– QUASE RUÍDO BRANCO - MA(2)	46
FIGURA 11– QUASE RUÍDO BRANCO - ARMA(1,1)	47
FIGURA 12– ALGORITMO <i>BOOTSTRAP</i> - IDENTIFICAÇÃO DA ESTRUTURA	50
FIGURA 13– ALGORITMO DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS	53
FIGURA 14– REPRESENTAÇÕES DAS CURVAS I E II - AR(3)	63
FIGURA 15– QUASE RUÍDO BRANCO - AR(3) (A)	65
FIGURA 16– QUASE RUÍDO BRANCO - AR(3) (B)	65
FIGURA 17– REPRESENTAÇÕES DAS CURVAS I E II - MA(3)	67
FIGURA 18– REPRESENTAÇÕES DAS CURVAS III E IV - MA(3)	68
FIGURA 19– QUASE RUÍDO BRANCO - MA(3) (A)	69
FIGURA 20– QUASE RUÍDO BRANCO - MA(3) (B)	70
FIGURA 21– REPRESENTAÇÕES DAS CURVAS I E II - ARMA(2,1)	72
FIGURA 22– QUASE RUÍDO BRANCO - ARMA(2,1) (A)	74
FIGURA 23– QUASE RUÍDO BRANCO - ARMA(2,1) (B)	74

FIGURA 24– MODELOS SIMULADOS - AR(3)	79
FIGURA 25– MODELOS SIMULADOS - MA(3)	80
FIGURA 26– PERCENTIS 5% E 95% DAS DISTRIBUIÇÕES EXATA, <i>BOOTS-TRAP</i> E ASSINTÓTICA DE ρ_K - MODELO 1	84
FIGURA 27– PERCENTIS 5% E 95% DAS DISTRIBUIÇÕES EXATA, <i>BOOTS-TRAP</i> E ASSINTÓTICA DE ρ_K - MODELO 2	84

LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– COMPORTAMENTO DA FAC E FACP PARA MODELOS ARIMA - FONTE MILLS(1990)	26
TABELA 2	– ESTIMATIVAS DO DESVIO PADRÃO DAS FAC E FACP. MODELO $\omega_T = 0.7\omega_{T-1} - 0.5\omega_{T-2} + 0.5\omega_{T-3} + A_T$	81
TABELA 3	– ESTIMATIVAS DO DESVIO PADRÃO DAS FAC E FACP. MODELO $\omega_T = 0.1\omega_{T-1} + 0.1\omega_{T-2} + 0.1\omega_{T-3} + A_T$	81
TABELA 4	– PROBABILIDADE DE COBERTURA DO ZERO. MODELO $\omega_T =$ $0.7\omega_{T-1} + 0.5\omega_{T-2} + 0.5\omega_{T-3} + A_T$	82
TABELA 5	– PROBABILIDADE DE COBERTURA DO ZERO. MODELO $\omega_T =$ $0.1\omega_{T-1} + 0.1\omega_{T-2} + 0.1\omega_{T-3} + A_T$	82
TABELA 6	– ESTIMATIVAS DO DESVIO PADRÃO DAS FAC E FACP. MODELO $\omega_T = -0.15A_{T-1} - 0.15A_{T-2} + 0.225A_{T-3} + A_T$	85
TABELA 7	– ESTIMATIVAS DO DESVIO PADRÃO DAS FAC E FACP. MODELO $\omega_T = -0.2A_{T-1} - 0.5A_{T-2} + 0.1A_{T-3} + A_T$	85
TABELA 8	– PROBABILIDADE DE COBERTURA DO ZERO. MODELO $\omega_T =$ $-0.15A_{T-1} - 0.15A_{T-2} + 0.225A_{T-3} + A_T$	86
TABELA 9	– PROBABILIDADE DE COBERTURA DO ZERO. MODELO $\omega_T =$ $-0.2A_{T-1} - 0.5A_{T-2} + 0.1A_{T-3} + A_T$	86

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 JUSTIFICATIVA	13
1.2 OBJETIVOS	16
1.2.1 Objetivo Geral	16
1.2.2 Objetivos Específicos	16
2 REVISÃO DA LITERATURA	17
2.1 MODELOS ARIMA	17
2.1.1 Introdução	17
2.1.2 Condições de estacionaridade e invertibilidade	18
2.1.3 Fases da Metodologia Box & Jenkins	24
2.2 O MÉTODO <i>BOOTSTRAP</i>	35
2.2.1 Introdução	35
2.2.2 <i>Bootstrap</i> Não Paramétrico	36
2.2.3 Intervalos de confiança <i>Bootstrap</i>	39
2.3 <i>BOOTSTRAP</i> EM SÉRIES TEMPORAIS	43
2.3.1 Introdução	43
2.3.2 O <i>Bootstrap</i> e o problema do Quase Ruído Branco	44
2.3.3 O <i>Bootstrap</i> na Identificação da Estrutura	48
2.3.4 O <i>Bootstrap</i> na Estimação de Parâmetros	51
2.3.5 Pesquisas Recentes	54
3 MATERIAL E MÉTODOS	60
3.1 O PROBLEMA DO QUASE RUÍDO BRANCO	60
3.2 O <i>BOOTSTRAP</i> NA IDENTIFICAÇÃO DA ESTRUTURA	60

4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	62
4.1	REGIÃO PARAMÉTRICA DO QUASE RUÍDO BRANCO	62
4.1.1	Resultado 1 - AR(3)	62
4.1.2	Resultado 2 - MA(3)	65
4.1.3	Resultado 3 - ARMA(2,1)	70
4.1.4	Resultado 4 - ARMA(2,2)	74
4.2	ESTUDO DE SIMULAÇÃO	78
4.2.1	Exemplos	80
5	CONCLUSÃO	87
	APÊNDICE A – RESULTADOS DA SIMULAÇÃO	90
	APÊNDICE B – PROGRAMAS COMPUTACIONAIS	150
	REFERÊNCIAS	180

1 INTRODUÇÃO

Muitos problemas de inferência estatística não possuem solução analítica, ou ainda estas não são fáceis de serem determinadas. Em vários casos é necessário supor normalidade para algumas estatísticas a fim de construir intervalos de confiança e realizar testes de significância. Porém, em diversas situações não se pode garantir a Gaussi-anidade desses estimadores, bem como pode ser difícil determinar suas distribuições de probabilidade, dificultando ou impossibilitando a construção de intervalos de confiança. Nessas situações é comum valer-se de aproximações assintóticas, contudo a amostra deve ter tamanho suficientemente grande.

Muitos desses problemas podem ser resolvidos utilizando a técnica computacionalmente intensiva conhecida como *Bootstrap* e introduzida por Efron (1979). Essa técnica pode ser da forma paramétrica ou não-paramétrica dependendo do conhecimento acerca do problema. No caso não paramétrico retira-se amostras com reposição, de mesmo tamanho da amostra original. Já no caso paramétrico, quando se tem informação sobre a distribuição dos dados, a amostragem é realizada diretamente nessa distribuição, com os parâmetros conhecidos substituídos por suas respectivas estimativas (SILVA, 1995). Em ambos os casos a distribuição da estatística de interesse aplicada à amostra *Bootstrap* fornece uma aproximação para a verdadeira distribuição do estimador clássico. Desta forma é possível obter estimativas da variabilidade dessas estatísticas e construir alguns tipos de intervalos de confiança em substituição aos métodos estatísticos tradicionais.

O *Bootstrap* aplicado à séries temporais surgiu no trabalho de Freedman e Peters (1984), onde o método foi empregado em modelos econométricos de previsão de energia no mercado americano. Chatterjee (1986) e Neto Chaves (1991) estudaram a estimação do erro-padrão das estimativas dos parâmetros em modelos ARMA(p,q).

Nas últimas décadas surgiram inúmeros trabalhos aplicando o *Bootstrap* em séries temporais a fim de avaliar a variabilidade de estatísticas necessárias, ao ajuste de modelos ARMA(p,q) e também na construção de intervalos de previsão.

Neste trabalho o método *Bootstrap* foi empregado a fim de se determinar a distribuição amostral dos estimadores das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, dos modelos AR(3), MA(3) e ARMA(2,2), utilizadas na fase de identificação da estrutura, proposta na metodologia Box & Jenkins para previsão em séries temporais. Desta forma será possível obter além das estimativas pontuais, medidas da variabilidade destas estatísticas e alguns intervalos de confiança para os parâmetros de interesse.

Esta pesquisa está estruturada em 4 capítulos. No segundo, é feita uma revisão bibliográfica onde é descrito o método Box & Jenkins para previsão em séries temporais, e o método *Bootstrap* não-paramétrico. É dada ênfase, não só aos resultados teóricos que fundamentam os métodos, mas também à algumas aplicações existentes. Aborda-se principalmente, as fases de identificação e estimação, bem como às condições de estacionaridade e invertibilidade do modelos ARIMA(p,d,q). Nesse capítulo descreve-se, ainda, o algoritmo Monte Carlo que é empregado para obter a distribuição *Bootstrap* de uma estatística. No capítulo 3 são apresentados os materiais e os métodos que são empregados na pesquisa, de forma detalhada. No capítulo 4 escreve-se sobre os resultados obtidos. O programa utilizado na simulação é apresentado no apêndice, bem como os resultados de todos os experimentos realizados.

1.1 JUSTIFICATIVA

O método proposto por Box & Jenkins para a previsão em séries temporais constitui um ciclo iterativo formado por 3 fases. Na primeira denominada fase de identificação da estrutura, um ou mais modelos candidatos são escolhidos para próxima etapa, a estimação dos parâmetros do modelo ARIMA(p,d,q). Na última fase são realizados testes de verificação da adequabilidade do modelo ajustado.

Na fase de identificação, a escolha do modelo é feita comparando-se o correlograma amostral com o teórico das diversas estruturas, procurando propriedades desejáveis que identifiquem um modelo adequado aos dados amostrais. Assim, é necessário estimar as funções de autocorrelação (FAC), ρ_k , e autocorrelação parcial (FACP), ϕ_{kk} , com base na realização da série temporal. Porém as distribuições de probabilidade dessas estatísticas são obtidas por aproximações assintóticas, e a suposição de Gaussianidade é empregada. Portanto, dispondo de séries com poucas observações, os intervalos de confiança tradicionais para testar as hipóteses nulas possuem baixo desempenho.

Além disso, em muitos casos é difícil reconhecer padrões nas FAC e FACP por meio do método Box & Jenkins, por isso vários métodos alternativos têm sido propostos na literatura nas últimas décadas. Choi (1992) avaliou e comparou diferentes procedimentos para a identificação de modelos como: o método corner (BEGUIN, 1980); os métodos de função de autocorrelação amostral estendida (TSAY; TIAO, 1984), e correlação canônica (TSAY; TIAO, 1985), dentre outros (KOREISHA; PUKKILA, 1990; HANNAN; RISSANEN, 1982). A principal característica desses métodos de identificação, é apontar um conjunto de modelos candidatos para uma cuidadosa análise posterior. Um problema importante desses procedimentos alternativos é que raramente a distribuição das estatísticas envolvidas na identificação do modelo é conhecida, e ainda em alguns procedimentos, a variância assintótica é estimada pela fórmula de Bartlett, baseada em suposição de Gaussianidade.

Pesquisas recentes empregam redes neurais e algoritmos genéticos como alternativas para identificar modelos, livres de suposições sobre a natureza da distribuição das estatísticas envolvidas. Ong, Huang e Tzeng (2005) e Minerva e Poli (2001), propõem algoritmos genéticos para identificação de modelos ARMA. Rolf, Sprave e W. (1997) utilizam algoritmos evolucionários para identificar e estimar os parâmetros do modelo. Machado e Souza (2012) comparam um algoritmo de *neuro-fuzzy back propagation* com procedimentos automáticos na identificação de modelos Box & Jenkins.

Embora o método *Bootstrap* esteja bem difundido, poucas pesquisas aplicam o método na identificação de modelos ARMA(p,q). Paparoditis e Streitberg (1992) estudaram a identificação de modelos considerando o vetor de autocorrelação, e aplicaram o *Bootstrap* na avaliação da distribuição amostral das correspondentes estatísticas envolvidas.

Neto Chaves (1991) propôs o *Bootstrap* como alternativa para identificação de modelos, cujos parâmetros pertencem a determinadas regiões do espaço paramétrico que apresentam baixos valores para a FAC e FACP. O autor definiu este processo como “Quase Ruído Branco”, e também determinou o espaço paramétrico das estruturas AR(1), AR(2), MA(1), MA(2) e ARMA(2,2) onde verifica-se o problema. Em modelos de todas as estruturas os valores da FAC e FACP, embora não nulos são aceitos como pertencentes aos intervalos de confiança clássicos construídos para os respectivos parâmetros, a fim de testar as hipóteses nulas:

$$H_{o1} : \rho_k = 0 \qquad H_{o2} : \phi_{kk} = 0$$

Assim, o método falha nesta fase classificando o processo como ruído branco, quando pode-se tratar de modelos com parâmetros situados em regiões do espaço paramétrico cujos valores da FAC e FACP são considerados, de forma equivocada, estatisticamente nulos.

O método *Bootstrap* pode ser empregado como alternativa para avaliar a variabilidade dessas estatísticas e produzir intervalos de confiança com maior poder para rejeitar a hipótese nula. Assim, com a finalidade de realizar um estudo rigoroso na área de previsão em séries temporais, nesta pesquisa será determinada a região de “Quase Ruído Branco” das estruturas AR(3), MA(3), ARMA(2,1) e ARMA(2,2). Também será avaliado o desempenho do método *Bootstrap* na fase de identificação, comparando com os resultados clássicos obtidos da metodologia Box & Jenkins, nas estruturas referenciadas.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Determinar as regiões do espaço paramétrico, onde verifica-se o problema do “Quase Ruído Branco” nas estruturas AR(3), MA(3), ARMA(2,1) e ARMA(2,2).

1.2.2 Objetivos Específicos

Avaliar o desempenho do método *Bootstrap*, nas fases de identificação da estrutura da metodologia Box & Jenkins, aplicados aos modelos AR(3), MA(3) e ARMA(2,2).

Simular séries temporais das estruturas referenciadas, a partir de modelos com parâmetros pertencentes à região de “Quase Ruído Branco” e fora dela a fim de:

- Obter as estimativas *Bootstrap* da FAC e FACP.
- Avaliar o desvio padrão *Bootstrap* dos estimadores da FAC e FACP.
- Medir e comparar a probabilidade de cobertura dos intervalos *Bootstrap* com o intervalo clássico.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 MODELOS ARIMA

2.1.1 Introdução

Séries temporais podem ser descritas por modelos paramétricos ou não paramétricos. Esses modelos são processos estocásticos, isto é, regidos por leis probabilísticas. Na classe de modelos paramétricos, uma metodologia muito utilizada é a proposta por Box e Jenkins (1976), que consiste em ajustar modelos auto-regressivos integrados de médias móveis, $ARIMA(p,d,q)$, a uma dada série temporal. Nesta, a construção do modelo é baseada em um ciclo iterativo de acordo com as seguintes etapas:

- i) identificação de um modelo;
- ii) estimação dos parâmetros do modelo;
- iii) verificação da validade do modelo;

Se o modelo não for adequado retorna-se à fase de identificação, repetindo o ciclo. Muitas vezes estima-se vários modelos, e depois de verificados escolhe-se qual deles fornece o menor erro quadrático médio de previsão.

A classe dos modelos $ARIMA$ é capaz de descrever séries estacionárias e não estacionárias do tipo homogênea. Séries temporais estacionárias são aquelas que se desenvolvem no tempo em torno de uma média constante. O tipo não estacionário homogêneo, flutua por certo tempo em torno de um nível, e depois passa a flutuar ao redor de um novo nível e assim por diante (MORETTIN; TOLOI, 2006).

Quando as séries apresentam esse tipo de não-estacionaridade, são tomadas diferenças sucessivas da série original até a série tornar-se estacionária. O número de

diferenças, que são efetuadas para alcançar a estacionaridade, é a ordem d do modelo ARIMA(p,d,q). Assim, quando a série atinge esta condição o modelo é reduzido à forma autoregressiva integrada de médias móveis, ARMA(p,q). Onde p e q são as ordens dos processos autoregressivos e médias móveis respectivamente.

Se uma das ordens p ou q forem nulas, o modelo torna-se autoregressivo de ordem p , AR(p), ou médias móveis de ordem q , MA(q) respectivamente. Esses modelos mais simples, apresentados nas pesquisas de Yule (1963) e Wold (1938), fundamentaram o trabalho de Box & Jenkins na construção dos modelos ARIMA.

De forma geral os modelos ajustados por meio da metodologia Box & Jenkins são parcimoniosos, e as previsões obtidas são bastante precisas comparadas com os demais métodos de previsão (MORETTIN; TOLOI, 2006). Um fator limitante no procedimento é a identificação do modelo, pois depende de razoável experiência do analista. Outro é que apresenta alguns resultados de validade assintótica caso a amostra tenha menos do que 50 observações (Neto Chaves, 1991).

2.1.2 Condições de estacionaridade e invertibilidade

Os modelos da classe ARIMA(p,d,q) são casos particulares de um modelo de filtro linear, no qual uma observação da série temporal em um dado instante t $\{t = 1, 2, 3, \dots\}$, z_t , é representada por uma soma ponderada de ruídos aleatórios.

$$z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots$$

$$z_t = \mu + \psi(B)a_t. \quad (1)$$

A sequência de variáveis aleatórias i.i.d, $\{a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots\}$, é chamada ruído branco e usualmente possui distribuição normal com média zero e variância σ_a^2 . O parâmetro μ , é em geral o nível do processo, e o polinômio $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$, é o operador linear que transforma a_t em z_t . Se a sequência de pesos ψ_1, ψ_2, \dots , for finita ou infinita convergente o processo z_t será estacionário.

Denotando $\omega_t = z_t - \mu$, pode-se escrever (1) em uma forma alternativa, como uma soma ponderada de valores passados $\omega_{t-1}, \omega_{t-2}, \dots$ mais um ruído a_t

$$\omega_t = \pi_1 \omega_{t-1} + \pi_2 \omega_{t-2} + \dots + a_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \omega_{t-j}. \quad (2)$$

Utilizando o operador $\pi(B)$, definido por

$$\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots, \quad (3)$$

a equação (2) pode ser escrita como

$$\pi(B) \omega_t = a_t. \quad (4)$$

Onde B é o operador de retardo dado por $B^m \omega_t = \omega_{t-m}$. De (1) e (4) tem-se $\psi(B) = \pi^{-1}(B)$.

Proposição: Um processo linear será estacionário se a série $\psi(B)$ convergir para $|B| \leq 1$; será invertível se $\pi(B)$ convergir para $|B| \leq 1$.

A demonstração desse resultado pode ser encontrado em Box, Jenkins e Reinsel (1994).

Modelos Autoregressivos

O modelo autoregressivo de ordem p , AR(p) é representado no instante t por uma combinação linear de observações passadas mais um ruído aleatório

$$\omega_t = \phi_1 \omega_{t-1} + \phi_2 \omega_{t-2} + \dots + \phi_p \omega_{t-p} + a_t \quad \Rightarrow \quad \phi(B) \omega_t = a_t, \quad (5)$$

onde $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ e $\omega_t = z_t - \mu$.

Esta estrutura é um caso especial do modelo de filtro linear (1). Demonstra-se que $\phi(B) = \pi(B)$, assim como $\phi(B)$ é finito a série $\pi(B)$ converge. Portanto, os modelos autoregressivos são invertíveis.

Como

$$\psi(B) = \frac{1}{\phi(B)}$$

$$\psi(B) = \frac{1}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p},$$

o processo será estacionário se o polinômio $\psi(B)$ convergir. Esta condição é satisfeita quando as raízes de $\phi(B)$ estão fora do círculo unitário, ou seja $|B| > 1$ para $1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p = 0$.

- Estacionaridade para o modelo AR(1)

Em modelos do tipo,

$$\omega_t = \phi_1 \omega_{t-1} + a_t,$$

ou equivalente, $\omega_t(1 - \phi_1 B) = a_t$. A estacionaridade é garantida se $|B| > 1$ para

$1 - \phi_1 B = 0$. Esta condição é satisfeita por

$$|\phi_1| < 1.$$

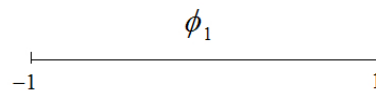


FIGURA 1: Estacionaridade AR(1)

- Estacionaridade para o modelo AR(2)

O modelo é estacionário se $|B| > 1$ para $1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$. O espaço paramétrico em que estas condições são satisfeitas é dado pela intersecção das curvas:

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

$$|\phi_2| < 1$$

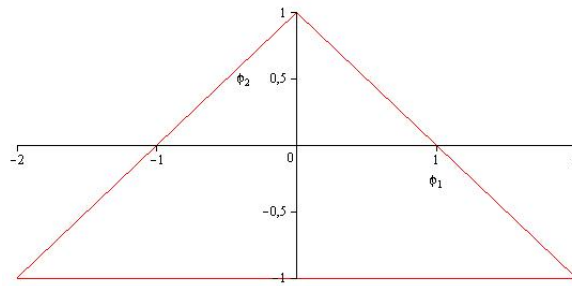


FIGURA 2: Estacionaridade AR(2)

- Estacionaridade para o modelo AR(3)

O espaço paramétrico em que $|B| > 1$ para $1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3 = 0$ é dado pela intersecção das curvas:

$$\phi_3^2 + \phi_2 + \phi_1 \phi_3 + \phi_2 \phi_3 + \phi_1 < 1$$

$$\phi_3^2 + \phi_2 + \phi_1 \phi_3 - \phi_2 \phi_3 - \phi_1 < 1$$

$$\phi_3^2 + \phi_1 \phi_3 + \phi_2 < 1$$

$$\phi_3^2 - \phi_1 \phi_3 - \phi_2 < 1$$

$$|\phi_3| < 1$$

A região interna à intersecção das curvas representa a região de estacionaridade para este modelo. Na figura(3), os valores de ϕ_3 estão entre -0,5 a 0,5.

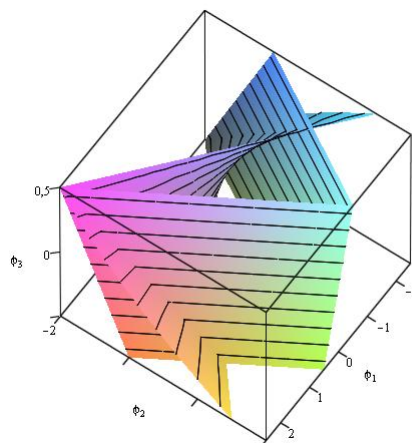


FIGURA 3: Estacionaridade AR(3)

Modelos Médias Móveis

O modelo de médias móveis de ordem q , MA(q), é representado por uma combinação linear dos ruídos de observações passadas de uma série temporal

$$\omega_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \Rightarrow \omega_t = \theta(B) a_t, \quad (6)$$

onde $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$. Demonstra-se que $\theta(B) = \psi(B)$, portanto esses modelos são estacionários. Como

$$\psi(B) = \frac{1}{\pi(B)} \Rightarrow \pi(B) = \frac{1}{\theta(B)}$$

$$\pi(B) = \frac{1}{1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q},$$

para que $\pi(B)$ convirja, as raízes de $\theta(B)$ devem estar fora do círculo unitário. Ou seja $|B| > 1$ para $\theta(B) = 0$. Assim, o processo será invertível. Os espaços paramétricos onde os processos médias móveis são invertíveis, são análogos aos definidos para a estacionaridade dos processos autoregressivos. Resumidamente:

- Invertibilidade para o Modelo MA(1)

$$|\theta_1| < 1$$

- Invertibilidade para o Modelo MA(2)

$$\theta_1 + \theta_2 < 1$$

$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$

$$|\theta_1| < 1$$

- Invertibilidade para o Modelo MA(3)

$$\theta_3^2 + \theta_2 + \theta_1 \theta_3 + \theta_2 \theta_3 + \theta_1 < 1$$

$$\theta_3^2 + \theta_2 + \theta_1 \theta_3 - \theta_2 \theta_3 - \theta_1 < 1$$

$$\theta_3^2 + \theta_1 \theta_3 + \theta_2 < 1$$

$$\theta_3^2 - \theta_1 \theta_3 - \theta_2 < 1$$

$$|\theta_3| < 1$$

Modelos Mistos

O modelo ARMA(p,q) inclui os termos autoregressivos e médias móveis da forma

$$\omega_t = \phi_1 \omega_{t-1} + \dots + \phi_p \omega_{t-p} - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} + a_t \Rightarrow \phi(B) \omega_t = \theta(B) a_t, \quad (7)$$

onde $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ e $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$.

Como $\psi(B) = \frac{1}{\phi(B)}$ e $\pi(B) = \frac{1}{\theta(B)}$, o processo será estacionário e invertível se as raízes de $\phi(B)$ e $\theta(B)$ estiverem fora do círculo unitário respectivamente, ou seja, $|B| > 1$ para $\phi(B) = 0$ e $\theta(B) = 0$.

Os espaços paramétricos para os modelos ARMA(1,1) e ARMA(2,2), onde os processos são estacionários e invertíveis são dados por:

- ARMA(1,1)

Estacionaridade

$$|\phi_1| < 1$$

Invertibilidade

$$|\theta_1| < 1$$

- ARMA(2,2)

Estacionaridade

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

$$|\phi_2| < 1$$

Invertibilidade

$$\theta_1 + \theta_2 < 1$$

$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$

$$|\theta_1| < 1$$

2.1.3 Fases da Metodologia Box & Jenkins

Identificação da Estrutura

A identificação do modelo ARIMA a ser ajustado aos dados, é feita com base nas autocorrelações e autocorrelações parciais estimadas. O objetivo nesta fase é identificar os valores p , d e q do modelo ARIMA(p,d,q). O procedimento sugerido por Morettin e Tolo (2006) consiste resumidamente em:

- i) Verificar se existe necessidade de uma transformação na série original, objetivando estabilizar sua variância;
- ii) Tomar diferenças da série, tantas vezes quantas necessárias para se obter uma série estacionária, de modo que o modelo seja reduzido a um ARMA(p,q);
- iii) Identificar o processo ARMA(p,q) resultante, através da análise das autocorrelações e autocorrelações parciais estimadas, cujos comportamentos devem imitar os comportamentos das respectivas quantidades teóricas.

A função de autocorrelação da série temporal (FAC) $\{w_t, t = 1, 2, 3, \dots, n\}$ depende

da defasagem de tempo k entre as observações, e é definida por

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

onde γ_k é a covariância de defasagem k , definida por $\gamma_k = E[w_t - E(w_t)][w_{t+k} - E(w_t)]$.

O estimador da autocorrelação de defasagem k é

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (w_t - \bar{w})(w_{t+k} - \bar{w})}{\sum_{t=1}^n (w_t - \bar{w})^2} \quad (9)$$

em que \bar{w} é a média com base na série, e é estimada por $\bar{w} = \sum_{t=1}^n \frac{w_t}{n}$.

A função de autocorrelação parcial (FACP) é utilizada para avaliar a relação entre a observação w_t e w_{t-k} desconsiderando o efeito das defasagens intermediárias. O coeficiente de autocorrelação parcial, Φ_{kk} , é definido como o último coeficiente do modelo AR(k). Assim ajusta-se sucessivamente modelos de ordem AR(1), AR(2), ..., AR(k) de forma que $\phi_{11} = \phi_1$, $\phi_{22} = \phi_2$, ..., $\phi_{kk} = \phi_k$. Por meio das equações de Yule-Walker (BOX; JENKINS; REINSEL, 1994), pode-se obter os coeficientes de autocorrelação parcial em função dos coeficientes de autocorrelação.

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \phi_{k3} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix}, \forall k = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

As estimativas, $\hat{\phi}_{11}, \hat{\phi}_{22}, \dots, \hat{\phi}_{kk}$, são obtidas substituindo-se ρ_j , $j = 1, 2, \dots, k$ pelas estimativas obtidas de (9).

O comportamento das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial de um processo ARIMA(p,d,q) é bem caracterizado para as cinco principais estruturas ARIMA. Na tabela (1) Mills (1990) resume os comportamentos esperados dos gráficos das FAC

e FACP para as estruturas ARIMA.

MODELO	FAC	FACP
(1,d,0)	Decaimento exponencial ou oscilatório	$\phi_{kk} = 0$ para $k > 1$
(2,d,0)	Decaimento exponencial ou senoidal	$\phi_{kk} = 0$ para $k > 2$
(p,d,0)	Decaimento exponencial ou senoidal	$\phi_{kk} = 0$ para $k > p$
(0,d,1)	$\rho_k = 0$ para $k > 1$	Prevalece decaimento exponencial
(0,d,2)	$\rho_k = 0$ para $k > 2$	Prevalece decaimento exponencial ou senoidal
(0,d,q)	$\rho_k = 0$ para $k > q$	Prevalece combinação linear decaimento exponencial e ou senoidal
(1,d,1)	Decaimento exponencial a partir da defasagem 1	Prevalece decaimento exponencial a partir da defasagem 1
(p,d,q)	Decaimento exponencial a partir da defasagem q-p	Prevalece decaimento exponencial e ou senoidal a partir da defasagem q-p

TABELA 1: Comportamento da FAC e FACP para modelos ARIMA - Fonte Mills(1990)

Procura-se estas propriedades no correlograma amostral a fim de identificar a ordem do modelo.

Como existe a presença de aleatoriedade nas estimativas das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, para avaliar a precisão destas estatísticas é necessário que se conheça suas distribuições de probabilidade. Se o parâmetro estimado, ρ_k , é nulo e o tamanho da série é moderado para grande, Anderson (1942), mostrou que o estimador, $\hat{\rho}_k$, tem distribuição Gaussiana com esperança nula. Uma expressão aproximada para a variância de $\hat{\rho}_k$, foi proposta por Bartlett (1946), e se as correlações teóricas ρ_j , são nulas para defasagens maiores do que uma defasagem fixada q, $j > q$ têm-se

$$V(\hat{\rho}_k) \cong \frac{1}{n} \left[1 + 2 \sum_{j=1}^q \rho_j^2 \right] \quad k > q, \quad (11)$$

mas como ρ_j é desconhecida usa-se sua estimativa obtida por (9).

Considerando um processo autoregressivo de ordem p, Quenouille (1949) mostrou que a variância aproximada da estimativa $\hat{\phi}_{kk}$ é $V(\hat{\phi}_{kk}) = \frac{1}{n}$, e assume-se distribuição

Gaussiana para amostras com n grande. Assim pode-se obter os intervalos de confiança para testar as hipóteses

$$H_{o1} : \rho_k = 0 \text{ e } H_{o2} : \phi_{kk} = 0. \quad (12)$$

Dispondo-se dos pivôs $\frac{\hat{\rho}_k - 0}{\sqrt{V(\hat{\rho}_k)}}$ e $\sqrt{n}(\hat{\phi}_{kk} - 0)$, os intervalos de confiança de nível $(1 - \alpha)$ são

$$I = \left[-z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \sqrt{V(\hat{\rho}_k)}; \quad z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \sqrt{V(\hat{\rho}_k)} \right] \quad (13)$$

e

$$II = \left[-z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \quad (14)$$

A seguir descreve-se a estrutura das FAC e FACP dos modelos ARIMA(3,d,0), ARIMA(0,d,3) e ARIMA(2,d,2).

1) ARIMA(3,d,0)

Em modelos do tipo $z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \phi_3 z_{t-3} + a_t$, $t = 1, 2, 3, \dots, n$ onde δ é o termo constante, ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 são os parâmetros autoregressivos, a FAC e a FACP são descritas por:

a) FAC

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \phi_3 \rho_{k-3} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Assim os coeficientes de autocorrelação até a defasagem 3 podem ser representados em função dos coeficientes do modelo por:

$$\rho_1 = \frac{\phi_1 + \phi_2 \phi_3}{1 - \phi_2 - \phi_1 \phi_3 - \phi_3^2} \quad (16)$$

$$\rho_2 = \frac{\phi_1^2 + \phi_1 \phi_3 + \phi_2 - \phi_2^2}{1 - \phi_2 - \phi_1 \phi_3 - \phi_3^2} \quad (17)$$

$$\rho_3 = \frac{\phi_1^3 + \phi_1^2 \phi_3 + 2\phi_1 \phi_2 - \phi_1 \phi_2^2 + \phi_2^2 \phi_3 + \phi_3 - \phi_2 \phi_3 - \phi_1 \phi_3^2 - \phi_3^3}{1 - \phi_2 - \phi_1 \phi_3 - \phi_3^2} \quad (18)$$

b) FACP

Por meio das equações de Yulle- Walker, obtêm-se função de autocorrelação parcial em termos dos parâmetros do modelo.

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{\phi_1 + \phi_2 \phi_3}{1 - \phi_2 - \phi_1 \phi_3 - \phi_3^2} \quad (19)$$

$$\phi_{22} = \frac{-\phi_1 \phi_3 - \phi_2}{\phi_3^2 - 1} \quad (20)$$

$$\phi_{33} = \phi_3 \quad (21)$$

$$\phi_{kk} = 0 \quad k = 4, 5, 6, \dots \quad (22)$$

2) ARIMA (0,d,3)

a) FAC

Em modelos do tipo $z_t = \delta - \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \theta_3 a_{t-3} + a_t$, $t = 1, 2, 3, \dots, n$ onde δ é o termo constante, θ_1 , θ_2 e θ_3 são os parâmetros médias-móveis, a FAC é descrita por:

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \quad (23)$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2 + \theta_1 \theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \quad (24)$$

$$\rho_3 = -\frac{\theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \quad (25)$$

$$\rho_k = 0 \quad k \geq 4 \quad (26)$$

3) ARIMA (2,d,2)

Em modelos do tipo $z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} + a_t$, $t = 1, 2, 3, \dots, n$ onde δ é o termo constante, ϕ_1 , ϕ_2 são os parâmetros autoregressivos, e θ_1 , θ_2 são os parâmetros médias-móveis, a FAC é descrita por:

a) FAC

$$\begin{aligned} \rho_1 = & \frac{\phi_1 - \theta_1 - \phi_1 \phi_2 + \theta_1 \phi_2 - \phi_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1 - \theta_2 \theta_1 \phi_1^2 \phi_2 - \theta_2 \theta_1 \phi_2^2 + 3 \phi_1 \theta_2 \phi_2^2 + \phi_1^3 \theta_2 \phi_2 - \phi_1 \theta_2^2 \phi_2 + \theta_1 \phi_1^2 \phi_2 + \phi_1 \theta_1^2 \phi_2}{(-1 + \phi_2)(-1 - 2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 + 2 \phi_1 \theta_1 - 2 \theta_2 \phi_2 + 2 \theta_2 \phi_1^2 - 2 \theta_2 \phi_2^2 + \theta_1^2 \phi_2 + \theta_2^2 \phi_2 + \phi_2 - \theta_1^2 - \theta_2^2)} \\ & + \frac{3 \phi_1 \theta_2 \phi_2 - \phi_1 \theta_2 \phi_2^3 + \theta_2 \theta_1 \phi_1^2 - \theta_2 \theta_1 \phi_2 + \theta_2 \theta_1 \phi_2^3 - \theta_1 \phi_1^2 - \phi_1^3 \theta_2 + \phi_1 \theta_1^2 + \phi_1 \theta_2^2 + \theta_1 \phi_2^2 - \theta_1 \phi_2^3}{(-1 + \phi_2)(-1 - 2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 + 2 \phi_1 \theta_1 - 2 \theta_2 \phi_2 + 2 \theta_2 \phi_1^2 - 2 \theta_2 \phi_2^2 + \theta_1^2 \phi_2 + \theta_2^2 \phi_2 + \phi_2 - \theta_1^2 - \theta_2^2)}, \quad k = 1 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
\rho_2 = & \frac{\phi_2 - \theta_2 + \phi_1^2 - 2\phi_2^2 + \phi_2^3 + \phi_1\theta_2\theta_1 + \theta_1^2\phi_2 + \theta_2^2\phi_2 - \phi_1\theta_1 + 2\theta_2\phi_2 + 2\theta_2\phi_2^2 + \phi_1\theta_2\theta_1\phi_2 + \phi_1\theta_2\theta_1\phi_2^3}{(-1 + \phi_2)(-1 - 2\phi_1\theta_2\theta_1 + 2\phi_1\theta_1 - 2\theta_2\phi_2 + 2\theta_2\phi_1^2 - 2\theta_2\phi_2^2 + \theta_1^2\phi_2 + \theta_2^2\phi_2 + \phi_2 - \theta_1^2 - \theta_2^2)} \\
& - \frac{\theta_2\theta_1\phi_1^3\phi_2 - 3\phi_1\theta_2\theta_1\phi_2^2 + \phi_1^4\theta_2\phi_2 - \phi_1\theta_1\phi_2 + \theta_1\phi_1^3\phi_2 - \phi_1^2\theta_1^2\phi_2 + \phi_1^3\theta_2\theta_1 + \phi_1^2\theta_2\phi_2 - \phi_1^2\theta_2\phi_2^3}{(-1 + \phi_2)(-1 - 2\phi_1\theta_2\theta_1 + 2\phi_1\theta_1 - 2\theta_2\phi_2 + 2\theta_2\phi_1^2 - 2\theta_2\phi_2^2 + \theta_1^2\phi_2 + \theta_2^2\phi_2 + \phi_2 - \theta_1^2 - \theta_2^2)} \\
& - \frac{\phi_1^2\theta_2^2\phi_2 - \phi_1\theta_1\phi_2^3 + 4\phi_1^2\theta_2\phi_2^2 + 3\phi_1\theta_1\phi_2^2 - \theta_2\phi_2^4 + \theta_1^2\phi_2^3 + \theta_2^2\phi_2^3 - \phi_1^2\phi_2 - \phi_1^3\theta_1 - \theta_2\phi_1^4}{(-1 + \phi_2)(-1 - 2\phi_1\theta_2\theta_1 + 2\phi_1\theta_1 - 2\theta_2\phi_2 + 2\theta_2\phi_1^2 - 2\theta_2\phi_2^2 + \theta_1^2\phi_2 + \theta_2^2\phi_2 + \phi_2 - \theta_1^2 - \theta_2^2)} \\
& + \frac{\phi_1^2\theta_1^2 + \phi_1^2\theta_2^2 - 2\theta_2\phi_2^3 - 2\theta_1^2\phi_2^2 - 2\theta_2^2\phi_2^2}{(-1 + \phi_2)(-1 - 2\phi_1\theta_2\theta_1 + 2\phi_1\theta_1 - 2\theta_2\phi_2 + 2\theta_2\phi_1^2 - 2\theta_2\phi_2^2 + \theta_1^2\phi_2 + \theta_2^2\phi_2 + \phi_2 - \theta_1^2 - \theta_2^2)}, \quad k = 2
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \dots + \phi_p\rho_{k-p} \quad k > p \tag{29}$$

Estimação dos Parâmetros

Após a identificação da estrutura do modelo ARIMA(p,d,q), os parâmetros são estimados por meio do algoritmo de Marquardt (1949). Este processo iterativo determina o estimador de mínimos quadrados não lineares. A construção do algoritmo fundamenta-se no princípio da Máxima Verossimilhança proposto por Fisher (1950) que afirma “uma vez que o modelo esteja correto, tudo o que os dados tinham para informar sobre os parâmetros está contido na função de verossimilhança”. Assim, para uma realização da série diferenciada d vezes $\underline{\omega} = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ deve-se determinar os parâmetros do modelo que maximizam a probabilidade de desta realização acontecer, ou seja a função de verossimilhança.

Seja $\xi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \sigma_a^2]$, o vetor de parâmetros a ser estimado.

No procedimento não condicional, o logaritmo da função de verossimilhança para as $n + d$ observações da série é dado por

$$\ln(\xi) = f(\underline{\eta}) - n \ln(\sigma_a^2) - \frac{S(\underline{\eta})}{2\sigma_a^2}, \tag{30}$$

onde $\underline{\eta} = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q]$ e $S(\underline{\eta}) = \sum_{t=1}^n [a_t | (\underline{\eta}, \underline{\omega})]^2$ é a função de quadra-

dos não condicional.

Supõe-se Gaussianidade para o ruído $a_t, a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$.

Demonstra-se que para séries de tamanhos moderados a grandes $\ln(\xi)$ é dominado por $\frac{S(\underline{\eta})}{2\sigma_a^2}$. Assim, as curvas de nível da função $S(\underline{\eta})$ são aproximadamente às curvas de nível da função $\ln(\xi)$. Desta forma, maximizar $\ln(\xi)$ corresponde a minimizar $S(\underline{\eta})$, ou seja as estimativas fornecidas por mínimos quadrados se aproximam das obtidas pela função de verossimilhança.

Considera-se na identificação que o modelo é estacionário e invertível do tipo ARMA(p,q).

$$\omega_t = \phi_1 \omega_{t-1} + \dots + \phi_p \omega_{t-p} - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} + a_t.$$

Em função o ruído a_t tem-se

$$a_t = \omega_t - \phi_1 \omega_{t-1} - \dots - \phi_p \omega_{t-p} + \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q},$$

que é a expressão utilizada para obter $S(\underline{\eta})$. No processo de encontrar o valor de $\underline{\eta}$ que minimiza $S(\underline{\eta}) = \sum_{t=1}^n [a_t | (\underline{\eta}, \underline{\omega})]^2$, deve-se derivar $S(\underline{\eta})$ em relação aos parâmetros $\underline{\eta}$, porém quando os modelos são do tipo médias móveis ou ainda mistos, obtém-se um sistema de equações não lineares nos parâmetros. Sendo assim as estimativas deverão ser obtidas por mínimos quadrados não lineares.

As estimativas de mínimos quadrados serão obtidas pelo Algoritmo de Marquat, que combina os métodos de Gauss-Newton com o método do Gradiente. O algoritmo é descrito a seguir.

Passo 1: Escolhe-se o valor inicial $\underline{\eta}_0$, que pode ser determinado por Newton-Raphson ou fixando-se todos os elementos desse vetor em 0,1.

Passo 2: Calcula-se a soma de quadrados dos resíduos, S_0 associada com $\underline{\eta}_0$.

Passo 3: Calcula-se numericamente as derivadas necessárias ao método de Gauss-

Newton

$$d_{it} = -\frac{\partial a_t}{\partial \eta_i} \approx \frac{[a_t(\eta_{1,0}, \dots, \eta_{i,0}, \dots, \eta_{k,0}) - a_t(\eta_{1,0}, \dots, \eta_{i,0} + \delta_i, \dots, \eta_{k+1})]}{\delta_i} \quad (31)$$

Passo 4: Forma-se um sistema de equações linearizadas escalonado e padronizado, com a restrição do parâmetro π inicializando em 0,01 com as derivadas d_{it} , do terceiro passo:

$$A^o \underline{h}^o = \underline{g}^o \quad (32)$$

com

$$A_{ij}^o = \frac{A_{ij}}{D_i D_j}, \quad A_{ij} = \sum_{t=Q}^n d_{it} d_{jt}, \quad A_{ii}^o = 1 + \pi, \quad g_i^o = \frac{g_i}{D_i}, \quad g_i = \sum_{t=Q}^n d_{it} a_t \quad \text{e } D_i = \sqrt{A_{ii}}.$$

Passo 5: Resolve-se as equações linearizadas obtendo assim as estimativas de Mínimos Quadrados Ordinários para o vetor de correção \underline{h}^o . A partir de \underline{h}^o obtém-se nova estimativa de $\hat{\eta}_1$ dada por

$$\hat{\eta}_1 = \hat{\eta}_0 + \underline{h}_1 \quad (33)$$

com $h_j = \frac{h_j^o}{D_j}$. Passo 6: Encontra-se a nova soma de quadrados residual S_1 correspondente a $\hat{\eta}_1$ e compara-se S_1 com S_0 .

Passo 7: Como a estimativa $\hat{\eta}_1$ é determinada com base em uma aproximação linear, ela pode não conduzir a uma soma de quadrados $S_1 < S_0$. Assim, compara-se S_1 com S_0 e no caso $S_1 > S_0$, utiliza-se o Método Gradiente até alcançar-se em i iterações $S_i < S_{i-1}$. Durante esse estágio, de início $\hat{\eta}_0$ é substituído por $\hat{\eta}_1$, o parâmetro π (inicializado em 0,01) é multiplicado por um fator $F_2 = 10$ e torna-se a formar as equações linearizadas, determinando-se a seguir o vetor de correções \underline{h}_2 e assim por diante.

Passo 8: Se $S_1 < S_0$, testa-se a convergência comparando todos os elementos de $\hat{\eta}$ com ε (geralmente 10^{-3}). Quando os elementos são todos menores do que ε a convergência é assumida, caso o contrário retorna ao passo 3.

Os passos estão resumidos no fluxograma a seguir:

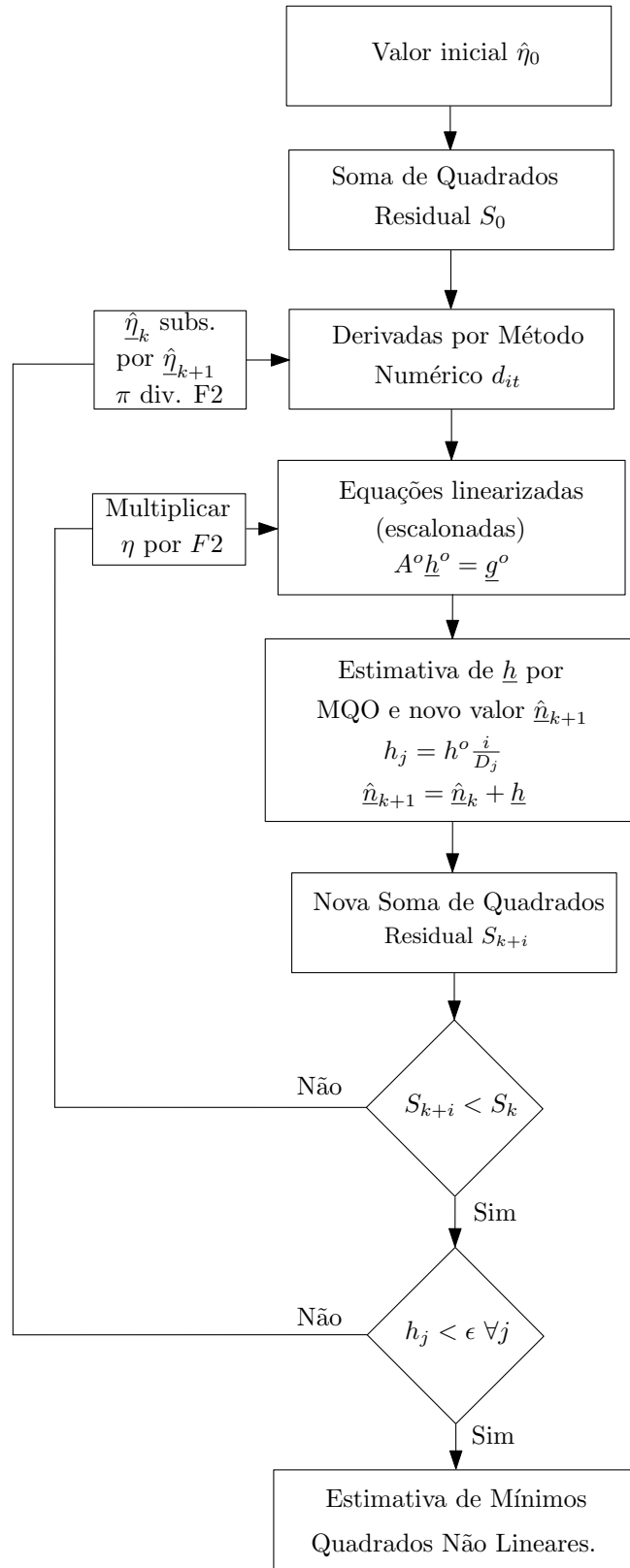


FIGURA 4: Algoritmo de Marquardt

Verificação do Modelo

Com o modelo ajustado é necessário verificar se ele representa os dados de forma adequada. Alguns testes de diagnóstico podem ser realizados, sendo que a maior parte é aplicado aos resíduos. Se o modelo estiver correto os resíduos estimados devem se aproximar de um ruído branco, ou seja $\hat{a}_t \sim N(0, \sigma_a^2)$.

Os principais testes aplicados aos resíduos podem ser efetuados usando pacotes estatísticos como o *Statgraphics*, *STATISTICA*, *S-PLUS*, *MINITAB*, dentre outros. Dentre vários testes os mais usados estão descritos sucintamente nos tópicos a seguir.

- Teste Box - Pierce

Esse teste proposto inicialmente por Box e Pierce (1970), e adaptado por Ljung e Box (1979) baseia-se na autocorrelação dos resíduos. Calcula-se a estatística

$$Q(K) = n(n+2) \sum_{j=1}^K \frac{\hat{r}_j^2}{(n-j)}, \quad (34)$$

que tem distribuição assintótica χ^2 com $K - p - q$ graus de liberdade, sob a hipótese que $K = K(n) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Autocorrelações altas para os resíduos, determinam grandes valores para $Q(K)$. Assim a hipótese de ruído branco para os resíduos será rejeitada.

- Teste da Autocorrelação Residual

Se o modelo ajustado está adequado, os resíduos estimados devem ser aproximadamente não correlacionados. O estimador dessa autocorrelação dado por $\hat{\rho}_k$, deve ter distribuição gaussiana com média nula e variância aproximada $1/n$, $\hat{\rho}_k \sim N(0, 1/n)$.

Um intervalo de confiança com limites de $\pm \frac{2}{\sqrt{n}}$ é adequado para testar a hipótese de que o resíduo possua correlação nula. (MORETTIN; TOLOI, 2006)

- Teste da Autocorrelação Cruzada

O teste fundamenta-se na correlação cruzada entre os valores passados da série e o valor presente do ruído. Se o modelo estiver correto a_t e Z_{t-k} serão não correlacionados para $k \geq 1$. Desta forma deve-se ter $\text{Cov} \{a_t, Z_{t-k}\} = 0$.

A função de correlação cruzada com a_t substituído por sua estimativa \hat{a}_t deve ser usada para analisar se existe dependência entre a_t e Z_{t-k} ,

$$\hat{s}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n \hat{a}_t (Z_{t-k} - \bar{Z})}{\sqrt{\sum_{t=1}^n \hat{a}_t^2 \sum_{t=1}^n (Z_t - \bar{Z})^2}}. \quad (35)$$

Morettin e Tolo (2006) afirmam que, exceto para k pequeno, $\text{Cov} \{a_t, Z_{t-k}\}$ é significativamente diferente de zero quando $|\hat{s}_k| > 2/\sqrt{n}$.

- Teste do Periodograma Acumulado

Dada uma série de resíduos $\{a_t, t = 1, 2, \dots, n\}$, Morettin e Tolo (2006) definem periodograma como um estimador do espectro $p_a(f)$ do processo por

$$I_a(f_i) = \frac{1}{2\pi n} \left[\left(\sum_{t=1}^n a_t \cos \frac{2\pi i}{n} t \right)^2 + \left(\sum_{t=1}^n a_t \sin \frac{2\pi i}{n} t \right)^2 \right], \quad (36)$$

com $0 < f_i < 1/2$. Também demonstram que se a_t for ruído branco, seu espectro é igual a $2\sigma_a^2$ no intervalo de $[0, 1/2]$. Assim, a função de distribuição espectral é dada por

$$Pa(f) = \int_0^f p_a(g) d(g) = \begin{cases} 0, & f < 0 \\ 2\sigma_a^2 f, & 0 \leq f \leq \frac{1}{2} \\ \sigma_a^2, & f \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (37)$$

Uma estimativa de $Pa(f_j)$ é $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^j I_q(f_i)$. Assim define-se como periodograma acumu-

lado (normalizado)

$$C(f_i) = \frac{\sum_{i=1}^j I_a(f_i)}{n\hat{\sigma}_a^2}. \quad (38)$$

Como $C(f_j)$ é função diretamente proporcional a f_j entre $[0; 1/2]$, o gráfico de $C(f_j) \times f_j$ para o ruído branco deve estar espalhado em torno de uma reta.

Se o modelo não estiver adequado ocorrerá desvios desta reta. Usa-se um tipo de teste *Kolmogorov-Smirnov* para traçar linhas limites próximas à linha teórica, verificando assim a aproximação de \hat{a}_t para o ruído branco com uma dada probabilidade.

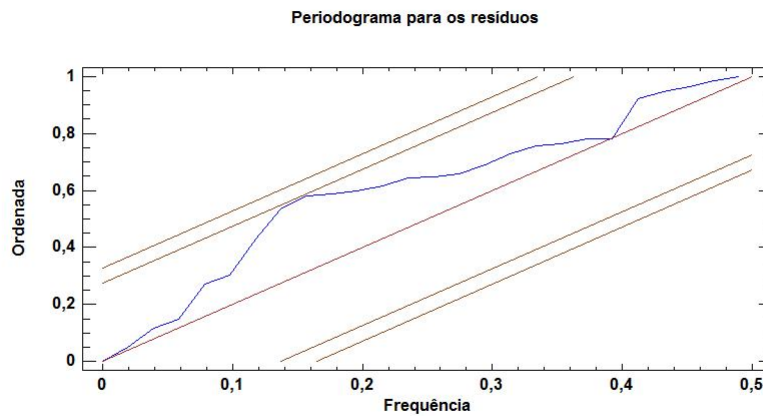


FIGURA 5: Periodograma para os resíduos

Um teste que não é aplicado aos resíduos é o superajustamento. Neste, estima-se um modelo com mais parâmetros do que o estimado preliminarmente, e verifica-se se estes não são significativos e se diminuem a variância dos resíduos.

2.2 O MÉTODO *BOOTSTRAP*

2.2.1 Introdução

O método *Bootstrap* introduzido no trabalho de Efron (1979), baseia-se na construção de distribuições amostrais por reamostragem de uma única amostra existente. Gerando dados por simulação pode-se trabalhar diretamente com esse modelo físico ao invés da forma teórica indutiva clássica (RAMOS; HO, 2003), portanto é indicado

para problemas onde os procedimentos estatísticos padrões sejam de difícil aplicação ou inexistam.

Define-se como distribuição *Bootstrap*, a distribuição condicional dos dados observados da estatística de interesse aplicado aos valores da amostra *Bootstrap*. Efron (1982) mostra que essa distribuição é uma aproximação da verdadeira distribuição da estatística de interesse, desta forma uma estatística *Bootstrap* é considerada um estimador da respectiva estatística clássica. Uma boa aproximação da distribuição *Bootstrap* pode ser obtida por meio simulação Monte Carlo.

A ideia básica desse método é estimar características desejadas, reproduzindo o mecanismo probabilístico gerador dos dados originais, com a distribuição de probabilidade desconhecida sendo substituída por uma outra conhecida que possa aproximá-la. Assim, características que não poderiam ser avaliadas na estrutura original do problema são estimadas pelas respectivas características calculadas em uma pseudo-estrutura, criada pelo processo de reprodução, sob a distribuição estimada escolhida para aproximar a original.(SILVA, 1995)

Dependendo que como as amostras *Bootstrap* são geradas, o método pode ser considerado paramétrico ou não paramétrico. No primeiro caso conhecendo-se a distribuição dos dados, cada amostra *Bootstrap* é obtida diretamente da amostragem nesta distribuição com os parâmetros desconhecidos substituídos por suas estimativas. No caso não paramétrico, as amostras são obtidas por reamostragem dos dados com reposição da amostra original. Em ambos os casos objetiva-se construir as distribuições de probabilidade amostrais das estatísticas de interesse.

Um escopo contendo teorias e aplicações sobre o método *Bootstrap* pode ser encontrado em Davison e Hinkley (1997) Efron e Tibshirani (1993).

2.2.2 *Bootstrap* Não Paramétrico

O *Bootstrap* não paramétrico consiste na reamostragem com reposição dos dados da amostra original. Para cada amostra são calculadas as estatísticas de interesse,

e assim o conjunto formado corresponde a uma estimativa da verdadeira distribuição amostral da estatística em questão. Ou seja, a distribuição *Bootstrap* da estatística é obtida desta forma por simulação Monte Carlo.

A seguir descreve-se o algoritmo para a obtenção dessa distribuição amostral. (EFRON; TIBSHIRANI, 1993)

Seja $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($X_i \sim i.i.d$) uma amostra aleatória de uma população de distribuição F desconhecida. Suponha $\theta = s(F)$ um parâmetro de interesse e $\hat{\theta} = s(\underline{x}, F)$ seu estimador.

1) Uma distribuição empírica \hat{F} é construída por meio do estimador não-paramétrico de máxima verossimilhança $\hat{F}_n(x)$ de F , que coloca a massa probabilística de $1/n$ em cada ponto amostral,

$$\hat{F}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n I(X_i \leq x)}{n}, \quad (39)$$

onde $I(X_i \leq x)$ é a função indicadora.

2) De \hat{F}_n extraem-se B amostras (chamadas de reamostras) de mesmo tamanho da amostra original. Cada reamostra é o conjunto $\underline{x}^{*l} = (x_1^{*l}, x_2^{*l}, \dots, x_n^{*l})$ $l = 1, \dots, B$.

3) Calcula-se para cada uma das B amostras a estatística *Bootstrap*, $\hat{\theta}^{*l} = s(\underline{x}^{*l}, \hat{F})$. Forma-se o conjunto $(\hat{\theta}^{*1}, \hat{\theta}^{*2}, \dots, \hat{\theta}^{*B})$, que é uma aproximação da verdadeira distribuição amostral da estatística $\hat{\theta}$.

Assim com o conjunto obtido pode-se obter a estimativa *Bootstrap* de θ , por

$$\hat{\theta}^* = \frac{\sum_{l=1}^B \hat{\theta}^{*l}}{B}. \quad (40)$$

O estimador do erro padrão *Bootstrap* (EFRON; TIBSHIRANI, 1993) é dado por

$$\hat{\sigma}_B = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^B (\hat{\theta}^{*l} - \hat{\theta}^*)^2}{B-1}}. \quad (41)$$

O Fluxograma a seguir ilustra o procedimento *Bootstrap* não paramétrico:

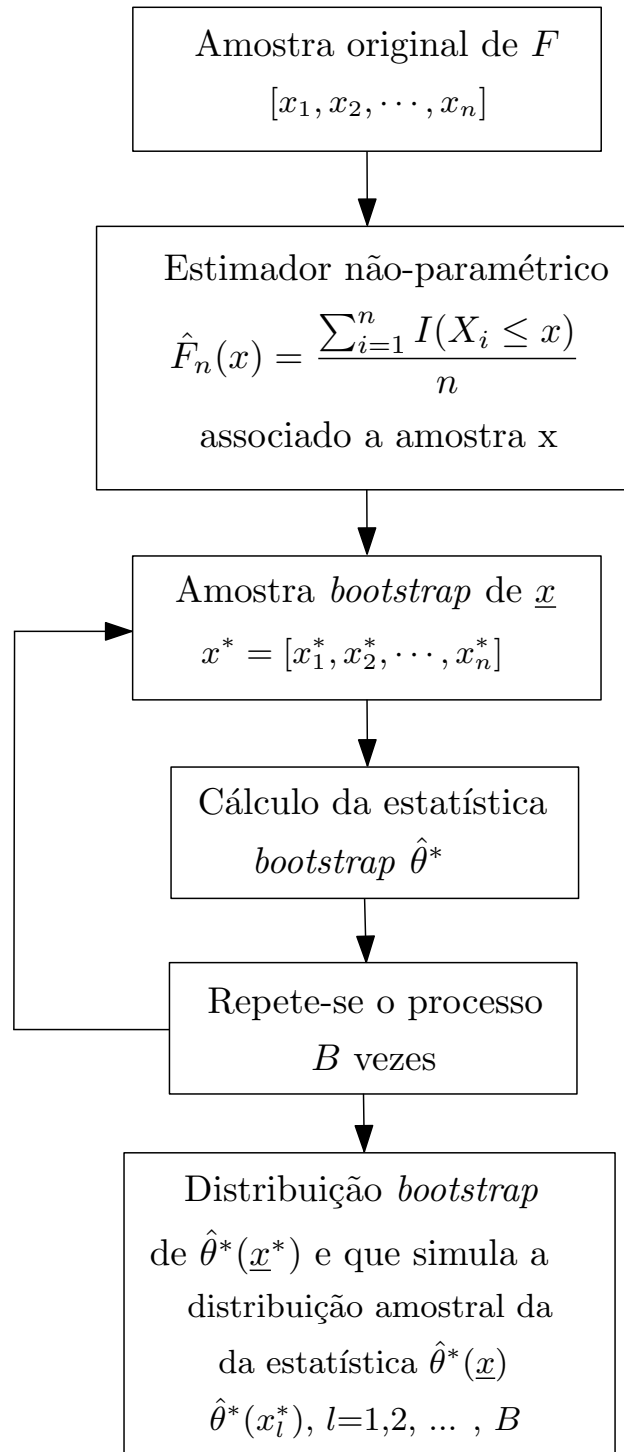


FIGURA 6: Algoritmo *Bootstrap*

A convergência da estimativa *Bootstrap* para a estimativa clássica do parâmetro, depende no número de replicações, B , realizadas na amostra original. Se $B \rightarrow \infty$, a convergência é garantida pela lei do grandes números, então estimativas como por exemplo o erro padrão e o enviesamento se igualam as estimativas de mínima verossimilhança (EFRON, 1982). Logo para o cálculo das estimativas *Bootstrap* é preciso um valor de B muito grande, geralmente $B = 1000$ produz bons resultados.

2.2.3 Intervalos de confiança *Bootstrap*

Em um processo de inferência estatística, geralmente é insuficiente avaliar determinadas estatísticas apenas com um processo de estimação pontual. No processo de estimação por intervalo pode-se avaliar o erro que se comete na estimação pontual, por meio da construção de intervalos de confiança para o parâmetro de interesse.

O método *Bootstrap* pode ser usado para a produção de intervalos de confiança para um parâmetro de interesse θ de uma população descrita por uma função de probabilidade F . É uma forma alternativa quando os intervalos aproximados usuais não sejam fáceis de construir ou não existam.

A seguir descreve-se a construção dos principais intervalos de confiança pelo método *Bootstrap*.

Intervalo *Bootstrap* Padrão

Seja $\hat{\sigma}_B(\hat{\theta})$ a estimativa *Bootstrap* de $\hat{\sigma} = \sqrt{V(\hat{\theta})}$. O intervalo de confiança *Bootstrap* padrão para o parâmetro θ , com probabilidade de cobertura $1 - 2\alpha$ é dado por

$$[\hat{\theta} + z_\alpha \hat{\sigma}_B(\hat{\theta}), \hat{\theta} - z_\alpha \hat{\sigma}_B(\hat{\theta})], \quad (42)$$

onde z_α é o α - ésimo percentil da distribuição normal padrão, isto é $z_\alpha = \phi^{-1}(\alpha)$.

Para a construção desse intervalo, usa-se o pivô,

$$T = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\sigma}_B(\hat{\theta})} \sim N(0, 1).$$

Uma vantagem do intervalo *Bootstrap* padrão é sua facilidade de construção, porém esse intervalo tende a não ser acurado quando se dispõe de amostras pequenas. Também algumas características que podem existir na distribuição de T , como assimetria e tendenciosidades, podem prejudicar o desempenho do intervalo no sentido da sua acurácia (SILVA, 1995).

Intervalo t - *Student Bootstrap*

Sob a suposição de que a distribuição da estatística T , definida na seção anterior, pode ser aproximada pela distribuição normal padrão, constrói-se o intervalo *Bootstrap* padrão. Porém essa aproximação torna-se válida quando o tamanho da amostra n , tende para o infinito.

Em amostras pequenas, uma aproximação é dada pela distribuição t -*Student* com $(n - 1)$ graus de liberdade.

$$T = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\sigma}_B(\hat{\theta})} \sim t_v \quad v = n - 1,$$

e para uma probabilidade de cobertura $(1 - 2\alpha)$ temos,

$$1 - 2\alpha = P(t_{v,\alpha} \leq T \leq t_{v,1-\alpha}) = P(t_{v,\alpha} \leq T \leq -t_{v,\alpha}).$$

Assim, o intervalo de confiança t -*Student Bootstrap* com probabilidade de cobertura aproximada $1 - 2\alpha$ é dado por

$$[\hat{\theta} + t_{v,\alpha} \hat{\sigma}_B(\hat{\theta}), \quad \hat{\theta} - t_{v,\alpha} \hat{\sigma}_B(\hat{\theta})]. \quad (43)$$

Da mesma forma que o intervalo *Bootstrap* padrão, o t -*Bootstrap* é simétrico em torno da estimativa do parâmetro. Portanto não levam em consideração a assimetria

na distribuição de $\hat{\theta}$. Pode-se por meio do procedimento de transformação, obter um intervalo melhor para alcançar a simetria da distribuição de $\hat{\theta}$.

Em situações onde podem ser definidos limites de confiança, o intervalo *t-Student* é acurado de ordem 1 (EFRON, 1987).

Intervalo *t - Bootstrap*

Os intervalos *Bootstrap* padrão e *t-Student Bootstrap*, são construídos supondo uma aproximação da distribuição de T à distribuição normal padrão e a *t-Student* com $(n - 1)$ graus de liberdade respectivamente. Porém essa suposição nem sempre é válida. O intervalo de confiança *t-Bootstrap* é construído usando uma aproximação para a distribuição de T fornecida pelo *Bootstrap*. Desta forma, estimativas *Bootstrap* dos percentis da distribuição de T são empregadas para formar o intervalo.

A aproximação *Bootstrap* para a distribuição de T é a distribuição de T^* ,

$$T^* = \frac{\hat{\theta}^* - \hat{\theta}}{\hat{\sigma}_B(\hat{\theta})},$$

condicional aos dados observados. De acordo com Efron (1987), para construir esse intervalo toma-se t_α^* e $t_{1-\alpha}^*$, percentis da distribuição *Bootstrap* de T de forma que

$$P(t_\alpha^* \leq T \leq t_{1-\alpha}^*) = 1 - 2\alpha.$$

Se a distribuição *Bootstrap* de T^* fornece uma boa aproximação para a distribuição de T então,

$$1 - 2\alpha = P(t_\alpha^* \leq T^* \leq t_{1-\alpha}^*) = P(\hat{\theta} - t_{1-\alpha}^* \hat{\sigma}_B(\hat{\theta}) \leq \theta \leq \hat{\theta} - t_\alpha^* \hat{\sigma}_B(\theta)).$$

Logo o intervalo de confiança *t-Bootstrap* para o parâmetro θ com probabilidade de cobertura aproximada $1 - 2\alpha$ é dado por

$$[\hat{\theta} - t_{1-\alpha}^* \hat{\sigma}_B(\hat{\theta}), \hat{\theta} - t_\alpha^* \hat{\sigma}_B(\theta)]. \quad (44)$$

A distribuição de T^* pode ser obtida de forma aproximada pelo algoritmo descrito na seção 2.2.3. Desta forma, seja $\underline{x}^{*l} = (x_1^{*l}, x_2^{*l}, \dots, x_n^{*l})$ $l = 1, \dots, B$, as B reamostras.

Para cada uma das reamostras calcula-se,

$$T^{*l} = \frac{\hat{\theta}^{*l} - \hat{\theta}}{\hat{\sigma}(\hat{\theta}^{*l})},$$

onde $\hat{\sigma}(\hat{\theta}^{*l})$ é a estimativa do desvio padrão de $\hat{\theta}^{*l}$ em cada amostra *Bootstrap*. Ordenando-se os valores de T^{*l} e tomando-se os α - ésimo de $(1 - \alpha)$ - ésimo percentis da distribuição, obtém-se os limites para formar o intervalo.

O intervalo *t-Bootstrap* pode ser acurado e de ordem 2.

Intervalo Percentil

Efron (1982) propôs um intervalo de confiança percentil com probabilidade de cobertura $(1 - 2\alpha)$, definido pelos percentis α e $(1 - \alpha)$ da distribuição de $\hat{\theta}^*$.

Assim, ordena-se os valores de θ^{*l} e toma-se aqueles correspondentes às posições $B \cdot \alpha$ e $B \cdot (1 - \alpha)$, formando o intervalo de confiança percentílico

$$[C\hat{D}F^{-1}(\alpha), C\hat{D}F^{-1}(1 - \alpha)] = [\hat{\theta}^{*l(\alpha)}, \hat{\theta}^{*l(1-\alpha)}]. \quad (45)$$

Melhores resultados são obtidos para amostras de tamanho n grandes. Ao contrário dos intervalos definidos nas seções anteriores, o intervalo percentílico possui as propriedades de invariância, transformações monótonas e preservação da amplitude.

Intervalo Percentil com correção para tendência

De forma geral, o intervalo percentílico fornece boa probabilidade de cobertura em situações onde a distribuição de $\hat{\theta}$ é assimétrica. Porém se os estimadores $\hat{\theta}$ e $\hat{\theta}^*$ forem tendenciosos, o desempenho do intervalo neste caso será prejudicado. Assim,

um outro intervalo de confiança *Bootstrap*, denominado percentil com correção para tendência poderá ser empregado (EFRON, 1987).

O intervalo de confiança percentil, com correção para tendência para θ , com probabilidade de cobertura $(1 - 2\alpha)$ é dado por

$$[\hat{CDF}^{-1}(\Phi(2z_o + z_\alpha)), \hat{CDF}^{-1}(\Phi(2z_o - z_\alpha))], \quad (46)$$

onde $z_o = \Phi^{-1}(\hat{CDF}(\hat{\theta}))$ e $\hat{CDF}(\hat{\theta}) = P(\hat{\theta}^* \leq \theta) = \{(\hat{\theta}^{*l} \leq \hat{\theta})/B\}$.

Esse intervalo possui as propriedades de invariância, transformações monótonas e preservação da amplitude. É acurado de ordem 2.

2.3 BOOTSTRAP EM SÉRIES TEMPORAIS

2.3.1 Introdução

O método *Bootstrap* aplicado à séries temporais surgiu nos trabalhos de Freedman e Peters (1984), onde os autores utilizaram o método em um modelo econométrico de previsão de demanda de energia no mercado americano.

Nas décadas seguintes uma série de outras pesquisas surgiram, principalmente realizando procedimentos inferenciais em várias etapas no processo de construção de modelos para séries temporais.

O método *Bootstrap* foi empregado por Neto Chaves (1991) como auxiliar nas fases da metodologia Box & Jenkins. Sabe-se que essa metodologia possui alguns resultados assintóticos, e em algumas regiões do espaço paramétrico das estruturas de modelos para séries temporais pode ser completamente ineficaz. Assim, o método foi utilizado nas fases de identificação das estruturas e de estimação de parâmetros dos modelos AR(1), MA(1), AR(2), MA(2) e ARMA(1,1). Na seção seguinte, descreve-se os principais resultados obtidos nesta pesquisa.

2.3.2 O *Bootstrap* e o problema do Quase Ruído Branco

Na fase de identificação da estrutura da metodologia Box & Jenkins, compara-se o correlograma amostral de $\hat{\rho}_k$ e $\hat{\phi}_{kk}$ com os correlogramas teóricos. Porém nesta etapa, os intervalos de confiança para essas estatísticas definidos na seção 2.1.3, são construídos a partir de aproximações assintóticas, podendo apresentar um baixo desempenho em determinadas regiões do espaço paramétrico dos modelos ARMA(p,q). Ao se estimar a FAC e a FACP na fase de identificação, algumas vezes ocorre que estes valores embora não nulos, pertençam aos intervalos (13) e (14) respectivamente. Deste modo esses processos são considerados ruído branco, quando na verdade pode-se tratar de modelos com parâmetros em determinadas regiões do espaço amostral que possuem baixos valores de ρ_k e ϕ_{kk} .

Desta forma, para um estudo rigoroso de previsão em séries temporais, Neto Chaves (1991) definiu o Processo de “Quase Ruido Branco”.

Definição: Chama-se de “Quase Ruído Branco” o processo estocástico cujos valores da FAC e da FACP, estão nos intervalos (13) e (14) respectivamente.

O método *Bootstrap* foi empregado a fim de auxiliar na fase da identificação da estrutura, de modelos com parâmetros situados nas regiões do “Quase Ruído Branco” e fora dela. Assim obteve-se estimativas da variabilidade de $\hat{\rho}_k$ e $\hat{\phi}_{kk}$, foram construídos e avaliados o desempenho de alguns intervalos de confiança *Bootstrap*, comparando-os com os intervalos clássicos.

O estudo de simulação foi realizado com as principais estruturas dos modelos de séries temporais, AR(1), AR(2), MA(1), MA(2) e ARMA(1,1). Para tal foram determinadas inicialmente as regiões do espaço paramétrico destas estruturas onde verifica-se o problema do “Quase Ruído Branco”.

Apresentamos os principais resultados:

- AR(1)

Seja a estrutura estacionária e inversível AR(1) ou melhor aquela com mecanismo gerador de processos estacionários e inversíveis da forma: $z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + a_t$ $t \in T = \{1, 2, \dots, n\}$ onde $\delta \in \mathbb{R}$, $\phi_1 \in P = \{\phi_1 \in \mathbb{R} | -1 < \phi_1 < 1\}$, $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$, $\sigma_a > 0$, e o nível de significância $\alpha \in [0, 1]$. Então, esta estrutura contém processos do tipo Quase Ruído Branco no sub-espço $Q \subset P$ com $Q = \{\phi_1 \in \mathbb{R}; |\phi_1| < c = f(\alpha, n)\}$.

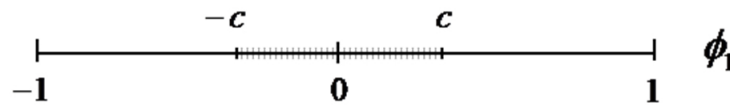


FIGURA 7: Quase Ruído Branco - AR(1)

- AR(2)

Seja a estrutura estacionária e inversível AR(2) ou melhor aquela com mecanismo gerador de processos estacionários e inversíveis da forma: $z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t$ $t \in T = \{1, 2, \dots, n\}$ onde $\delta \in \mathbb{R}$, $(\phi_1, \phi_2) \in P^2 = \{(\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{R}^2 | -2 < \phi_1 < 2 \text{ e } -1 < \phi_2 < 1\}$, $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$, $\sigma_a > 0$, e o nível de significância $\alpha \in [0, 1]$. Então, esta estrutura contém processos do tipo Quase Ruído Branco no sub-espço $Q^2 \subset P^2$ com $Q^2 = \{(\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{R}^2; |\phi_1| < c(1 - \phi_2) \text{ e } |\phi_2| < c\}$.

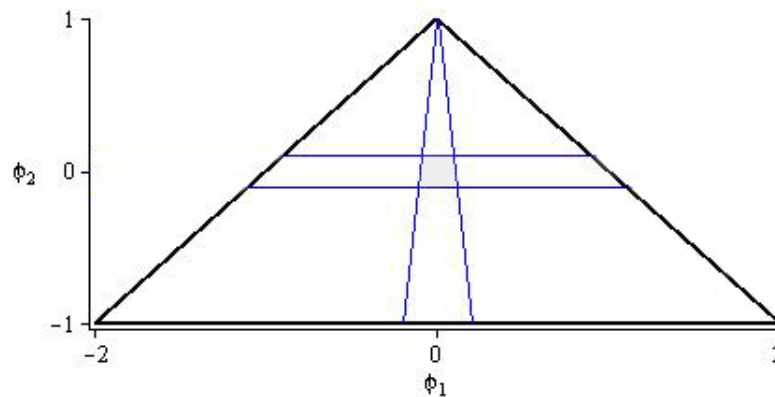


FIGURA 8: Quase Ruído Branco - AR(2)

- MA(1)

Seja a estrutura estacionária e inversível MA(1) ou melhor aquela com mecanismo gerador de processos estacionários e inversíveis da forma: $z_t = \delta - \theta_1 a_{t-1} + a_t$ $t \in T = \{1, 2, \dots, n\}$ onde $\delta \in \mathbb{R}$, $\theta_1 \in P = \{\theta_1 \in \mathbb{R} | -1 < \theta_1 < 1\}$, $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$, $\sigma_a > 0$, e o nível de significância $\alpha \in [0, 1]$. Então, esta estrutura contém processos do tipo Quase Ruído Branco no sub-espço $Q \subset P$ com $Q = \{\theta_1 \in \mathbb{R}; |\theta_1| < -1/2c + \sqrt{1 - 4c^2/2c}\}$.

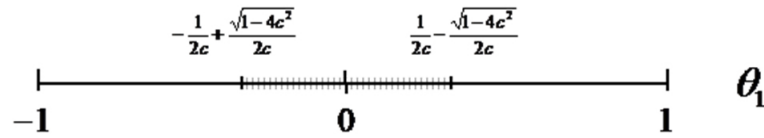


FIGURA 9: Quase Ruído Branco - MA(1)

- MA(2)

Seja a estrutura estacionária e inversível MA(2) ou melhor aquela com mecanismo gerador de processos estacionários e inversíveis da forma: $z_t = \delta - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} + a_t$ $t \in T = \{1, 2, \dots, n\}$ onde $\delta \in \mathbb{R}$, $(\theta_1, \theta_2) \in P^2 = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 | -2 < \theta_1 < 2 \text{ e } -1 < \theta_2 < 1\}$, $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$, $\sigma_a > 0$, e o nível de significância $\alpha \in [0, 1]$. Então, esta estrutura contém processos do tipo Quase Ruído Branco no sub-espço $Q^2 \subset P^2$ com $Q^2 = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 ; c\theta_1^2 + c\theta_2^2 + \theta_1 - \theta_1\theta_2 + c > 0, c\theta_1^2 + c\theta_2^2 - \theta_1 + \theta_1\theta_2 + c > 0, \theta_1^2 + \theta_2^2 + 1/c\theta_2 + 1 > 0 \text{ e } \theta_1^2 + \theta_2^2 - 1/c\theta_2 + 1 > 0\}$.

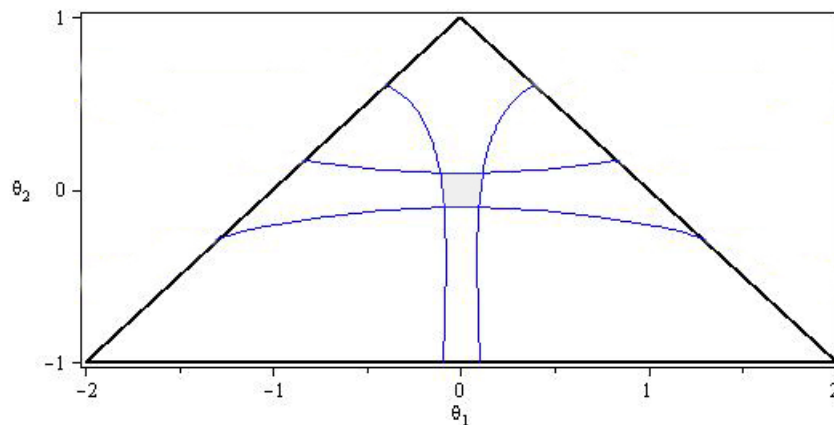


FIGURA 10: Quase Ruído Branco - MA(2)

- ARMA(1,1)

Seja a estrutura estacionária e inversível ARMA(1,1) ou melhor aquela com mecanismo gerador de processos estacionários e inversíveis da forma: $z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} - \theta_1 a_{t-1} + a_t$ $t \in T = \{1, 2, \dots, n\}$ onde $\delta \in \mathbb{R}$, $(\phi_1, \theta_1) \in P^2 = \{(\phi_1, \theta_1) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < \phi_1 < 1 \text{ e } -1 < \theta_1 < 1\}$, $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$, $\sigma_a > 0$, e o nível de significância $\alpha \in [0, 1]$. Então, esta estrutura contém processos do tipo Quase Ruído Branco no sub-espaço $Q^2 \subset P^2$ com $Q^2 = \{(\phi_1, \theta_1) \in \mathbb{R}^2 ; (\phi_1 - c)\theta_1^2 - (\phi_1^2 - 2c\phi_1 + 1)\phi_1 + \phi_1 - c < 0 \text{ e } (\phi_1 + c)\theta_1^2 - (\phi_1^2 + 2c\phi_1 + 1)\phi_1 + \phi_1 + c > 0\}$.

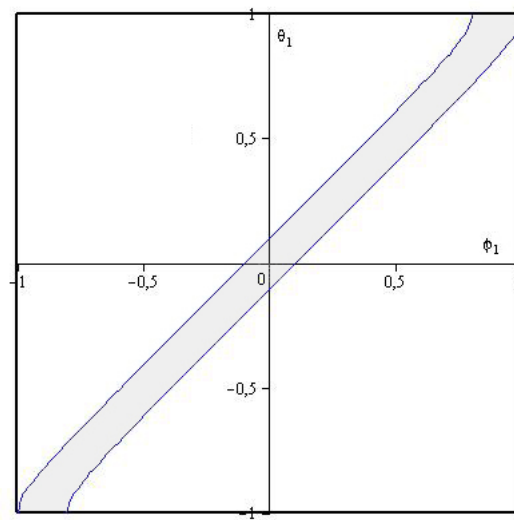


FIGURA 11: Quase Ruído Branco - ARMA(1,1)

Na fase da identificação da estrutura foram geradas séries temporais sintéticas colocando os parâmetros das estruturas referenciadas nas regiões onde ocorre o problema do “Quase Ruído Branco” e fora delas. As funções de autocorrelação, autocorrelação parcial foram estimadas da forma clássica e pelo método *Bootstrap*, também foram obtidas as estimativas dos erros-padrão dos respectivos estimadores por ambos os métodos. Os intervalos de confiança *Bootstrap* construídos para estes parâmetros, demonstram um poder maior de rejeição das hipóteses nulas definidas na seção 2.1.3 do que os intervalos clássicos. As estimativas *Bootstrap* do erro padrão foram inferiores às estimativas tradicionais em quase todos os casos.

Na fase de estimação de parâmetros, também observa-se um desempenho su-

perior dos intervalos *Bootstrap* em relação aos clássicos em praticamente todos os experimentos.

Nas seções seguintes descreve-se como o método *Bootstrap* pode ser aplicado nas etapas de identificação da estrutura e estimação de parâmetros da Metodologia Box & Jenkins.

2.3.3 O *Bootstrap* na Identificação da Estrutura

No emprego da metodologia Box & Jenkins, a ordem do modelo pode ser identificada por meio da significância das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostrais, com base nos intervalos definidos pelas expressões (13) e (14). O *Bootstrap* utilizado nesta fase pode auxiliar na identificação da estrutura do modelo, pois permite obter a distribuição de probabilidade de $\hat{\rho}_k$ e $\hat{\phi}_{kk}$, e assim avaliar a variabilidade destas estatísticas permitindo a construção de alguns tipos de intervalos de confiança sem a suposição de gaussianidade. Desta forma pode-se testar as hipóteses

$$H_{o_1} : \rho_k = 0 \quad e \quad H_{o_2} : \phi_{kk} = 0,$$

utilizando os intervalos de confiança *Bootstrap* em substituição ao resultado assintótico definido anteriormente.

O *Bootstrap* pode ser usado em modelos de quase todo o espaço paramétrico incluindo àqueles que pertencem ao subespaço onde ocorre o problema do “Quase Ruído Branco”. No entanto é necessário um algoritmo que preserve a estrutura de correlação da série, como o proposto por Neto Chaves (1991).

Dispondo-se da série histórica de dados $\underline{w} = \{w_t; t = 1, 2, 3, \dots, n\}$, as reamostras *Bootstrap* são obtidas por sorteio com reposição de $n - k$ pares da amostra original de pares $\{(w_t, w_{t+k})\}; t = \{1, 2, \dots, n - k\}$. Assim tem-se na l -ésima replicação *Bootstrap* a amostra de pares (w_t^{*l}, w_{t+k}^{*l}) , na qual é obtida a estimativa de ρ_k , $\hat{\rho}_k^{*l}$ pelo método usual

$$\hat{\rho}_k^{*l} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (w_t^{*l} - \bar{w})(w_{t+k}^{*l} - \bar{w})}{\sum_{t=1}^n (w_t^{*l} - \bar{w})^2}, \quad (48)$$

em que \bar{w} é a média com base na série, e é estimada por $\bar{w} = \sum_{t=1}^n \frac{w_t^*}{n}$.

Repetindo-se o processo B vezes tem-se o estimador *Bootstrap* de ρ_k ,

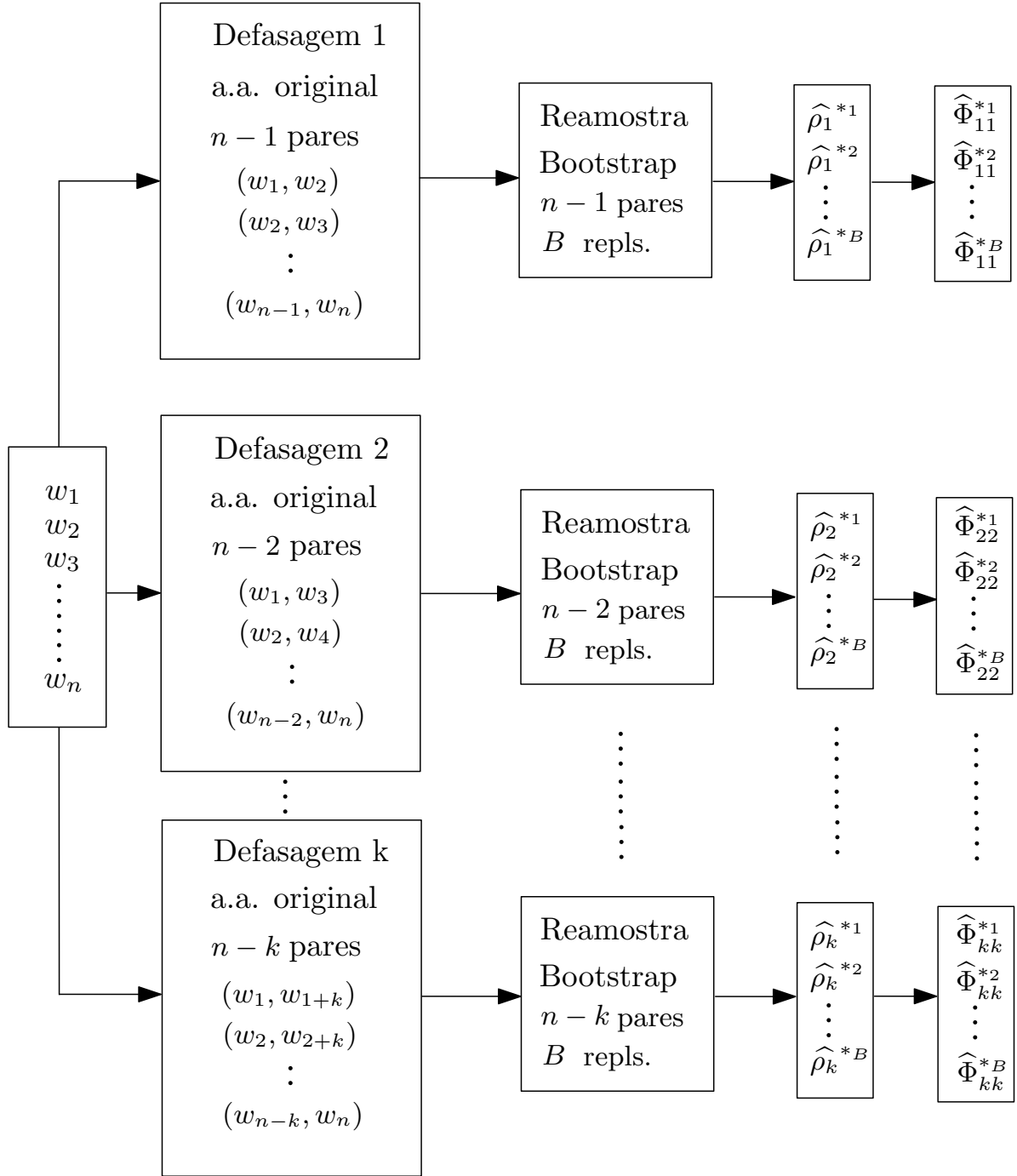
$$\hat{\rho}_k^* = \frac{\sum_{l=1}^B \hat{\rho}_k^{*l}}{B}. \quad (49)$$

As estimativas $\hat{\rho}_k^{*l}$ são elementos da distribuição amostral do estimador $\hat{\rho}_k^*$ que constitui uma aproximação da distribuição amostral de $\hat{\rho}_k$, estimativa clássica de ρ_k , se B for um conjunto muito grande. Assumindo-se que $\hat{\rho}_k^{*l}$, $l = 1, 2, 3, \dots, B$ são variáveis aleatórias i.i.d, Efron e Tibshirani (1993) mostrou pela lei dos grandes números que $\hat{\rho}_k^*$ é um estimador consistente de $E(\hat{\rho}_k)$.

$$\hat{\rho}_k^* = \frac{\sum_{l=1}^B \hat{\rho}_k^{*l}}{B} \longrightarrow E(\hat{\rho}_k)$$

A distribuição *Bootstrap* de $\hat{\phi}_{kk}$ pode ser obtida a partir da distribuição *Bootstrap* de $\hat{\rho}_k$, $\{\hat{\rho}_k^{*l}; l = 1, 2, 3, \dots, B\}$, calculando-se em cada replicação o valor de $\hat{\phi}_{kk}^{*l}$ em função da autocorrelação *Bootstrap* de defasagem k e de defasagens anteriores por meio usual. Prova-se de forma análoga, que $\hat{\phi}_{kk}^*$ é um estimador consistente de $E(\hat{\phi}_{kk})$.

A figura ilustra o algoritmo para obtenção de $\hat{\rho}_k^*$ e $\hat{\phi}_{kk}^*$.

FIGURA 12: Algoritmo *Bootstrap* - Identificação da Estrutura

Os erros padrão *Bootstrap* de $\hat{\rho}_k$ de $\hat{\phi}_{kk}$ são dados respectivamente por

$$s^*(\hat{\rho}_k) = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^B (\hat{\rho}_k^{*l} - \hat{\rho}_k^*)^2}{B}} \quad (51)$$

e

$$s^*(\hat{\phi}_{kk}) = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^B (\hat{\phi}_{kk}^{*l} - \hat{\phi}_{kk}^*)^2}{B}}. \quad (52)$$

Por meio das distribuições de $\hat{\rho}_k^*$ e $\hat{\phi}_{kk}^*$ pode-se obter intervalos de confiança *Bootstrap* sem a hipótese de normalidade, por exemplo os intervalos percentílicos de nível de confiança $1 - \alpha$

$$[\hat{\rho}_{k_{lo}}^*; \hat{\rho}_{k_{up}}^*] \text{ para } \hat{\rho}_k \text{ e } [\hat{\phi}_{kk_{lo}}^*; \hat{\phi}_{kk_{up}}^*] \text{ para } \hat{\phi}_{kk}, \quad (53)$$

com $lo = 100.\alpha/2\%$ e $up = 100.(1 - \alpha/2)\%$.

Como esses intervalos podem ser assimétricos em relação às estimativas $\hat{\rho}_k^*$ e $\hat{\phi}_{kk}^*$ respectivamente, Efron (1986) propôs um intervalo percentílico com vício corrigido (BC)

$$[CDF^{-1}(\phi(2z_o - z_\alpha)); CDF^{-1}(\phi(2z_o + z_\alpha))] \text{ para } \rho_k \text{ ou } \phi_{kk}, \quad (54)$$

com $z_o = \phi^{-1}(CDF(\hat{\rho}_k^*))$ ou $z_o = \phi^{-1}(CDF(\hat{\phi}_{kk}^*))$, onde ϕ corresponde a função de distribuição da normal padrão.

2.3.4 O *Bootstrap* na Estimação de Parâmetros

A distribuição do estimador de mínimos quadrados não lineares do coeficiente η_i de um modelo ARMA(p,q) pode ser obtida de forma alternativa pelo método *Bootstrap*. Como a variância do estimador de $\hat{\eta}$ é obtida de forma aproximada por meio da matriz de informação de Fisher, Chatterjee (1986) aplicou o *Bootstrap* na estimação do erro-padrão do estimador.

Descreve-se o algoritmo proposto por Chatterjee (1986) para a obtenção da distribuição *Bootstrap* de η , tomando como exemplo o modelo ARMA(1,1).

Estima-se inicialmente os parâmetros da forma clássica. Obtêm-se então a estimativa $\hat{\eta} = (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)$ dos parâmetros do modelo. Onde $\hat{\eta}_1$ é o coeficiente da parte autoregressiva e $\hat{\eta}_3$ é o coeficiente da parte médias móveis.

Calcula-se o vetor de resíduos partindo desta estimativa inicial

$$\hat{a}_t = \hat{\eta}_3^{-1}(B)\hat{\eta}_1(B)\omega_t.$$

Por hipótese, os resíduos são v.a's i.i.d. com distribuição comum $N(0, \sigma_a^2)$. Desta forma, toma-se B amostras com reposição de tamanho n da amostra de resíduos, usando o estimador não paramétrico de verossimilhança \hat{F} da distribuição F .

Constrói-se com cada uma destas amostras *Bootstrap* uma nova série temporal, utilizando os parâmetros estimados inicialmente por

$$\hat{\eta}_1(B)\omega_t^* = \hat{\eta}_3(B)\hat{a}_t^*.$$

Repete-se o processo B vezes, com cada amostra *Bootstrap*, obtendo o conjunto de séries temporais

$$\{\underline{\omega}_l^*; l = 1, 2, \dots, B\}.$$

Com as séries obtidas, estima-se os parâmetros do modelo da forma clássica para cada série, obtendo o conjunto de vetores de estimativas *Bootstrap*

$$\{\underline{\hat{\eta}}_l^*; l = 1, 2, \dots, B\}.$$

Este conjunto é uma estimativa da distribuição amostral de $\hat{\eta}$. Assim pode-se obter a estimativa do erro padrão dessa estatística, e também construir intervalos de confiança para os parâmetros.

O fluxograma a seguir ilustra o algoritmo.

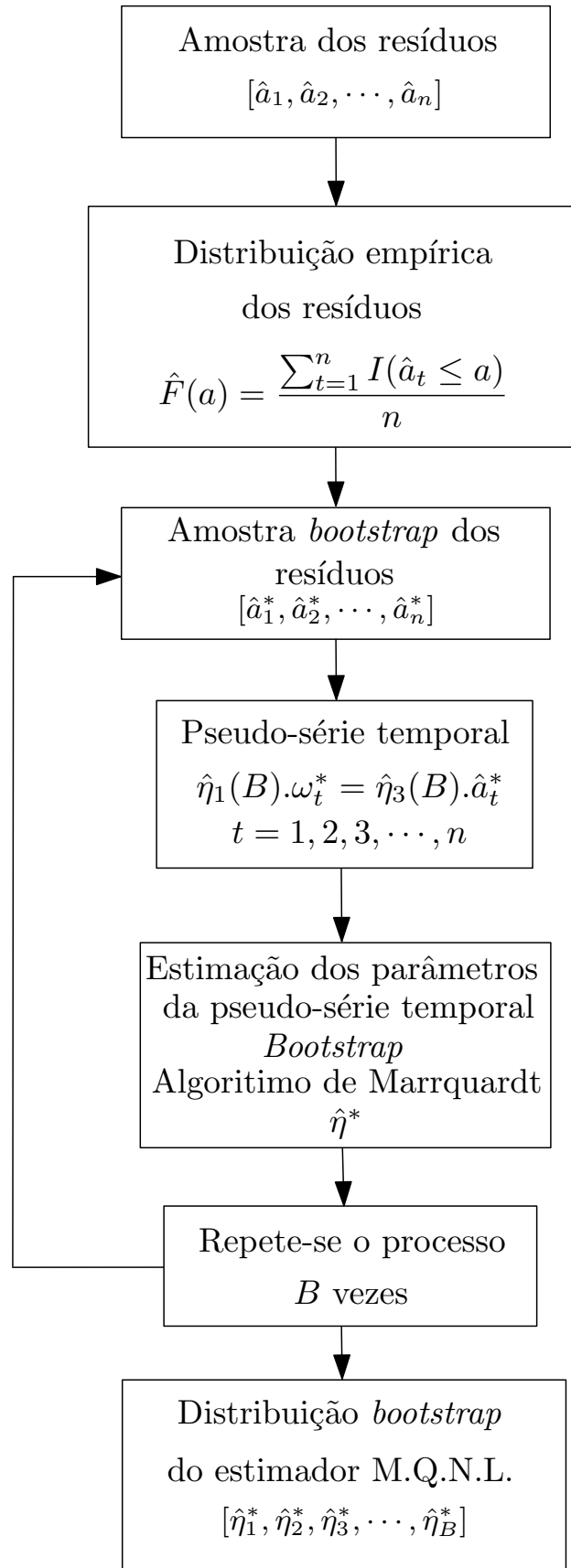


FIGURA 13: Algoritmo de Estimação de Parâmetros

2.3.5 Pesquisas Recentes

Nesta seção descreve-se resumidamente alguns trabalhos publicados nos últimos 10 anos, aplicando o método *Bootstrap* em séries temporais.

Intervalos de previsão *Bootstrap* para séries temporais transformadas

Pascuala, Romob e Ruiz (2005) propõem um procedimento *Bootstrap* para construir intervalos para previsão de valores futuros de uma variável, após um modelo $ARIMA(p,d,q)$ ter sido ajustado para uma série temporal transformada. As vantagens existentes sobre outros métodos para previsão desse tipo de série, é que os intervalos de *Bootstrap* propostos incorporam a variabilidade na estimativa de parâmetros, e não se baseiam em pressupostos de distribuição, nem da variável original nem da transformada.

Na análise de séries temporais, é comum transformar os dados antes de estimar o modelo utilizado para a previsão. Existem várias razões para a transformação dos dados antes do ajustamento de um modelo adequado, como estabilizar o aumento da variância para reduzir o impacto de outliers, fazer a distribuição normal uma melhor aproximação para a distribuição de dados, ou ainda fazer a variável transformada ter uma interpretação econômica conveniente. Aqui a transformação empregada foi a proposta por Tukey (1957).

Por meio de experimentos de Monte Carlo comparou-se o desempenho da abordagem *Bootstrap*, com métodos alternativos propostos na literatura para a construção de intervalos de previsão para séries com dados transformados. Existem duas principais alternativas. Na primeira assume-se uma distribuição simétrica para a variável original e para a variável transformada, que só podem ser implementadas por transformações logarítmicas e raiz quadrada. Estes intervalos de previsão ignoram a assimetria e os momentos mais altos da variável de interesse. Como resultado, esta abordagem irá gerar intervalos de previsão unilaterais enviesados. A segunda alternativa é baseada na retransformação das extremidades dos intervalos de previsão para a variável trans-

formada.

Nenhum destes intervalos é capaz de avaliar a incerteza dos parâmetros estimados. Os intervalos construídos simplesmente retransformando os valores superiores e inferiores dos intervalos de previsão usuais para a série transformada têm apenas boas propriedades quando a série transformada possui erros normais. Neste caso, os intervalos de Box-Jenkins usuais para a variável na métrica transformada possuem boas propriedades, que permanecem ao retornar para a escala original.

Os resultados mostram que, para séries transformadas que possuem erros não gaussianos, esses intervalos de previsão podem ser fortemente distorcidos. A correção do viés proposto por Guerrero (*apud* PASCUALA; ROMOB; RUIZ, 2005) não melhoram os resultados para os casos considerados neste trabalho. Os intervalos *Bootstrap* parecem ter propriedades adequadas.

Também foram analisadas como a cobertura e o comprimento dos intervalos de previsão são afetados por não levar em conta a variabilidade devido à estimativa de parâmetros. Demostrou-se que a cobertura média dos intervalos está mais próxima do valor nominal quando os intervalos são construídos incorporando a incerteza do parâmetro.

Como esperado, considerando estimadores consistentes, os efeitos de estimativa de parâmetros são particularmente importantes para amostras de pequenas dimensões. Além disso, estes efeitos são ainda mais importantes quando a distribuição do erro não é Gaussiana.

Os intervalos de previsão para a variável transformada, obtidos pelo método *Bootstrap* apresentaram propriedades razoáveis. Esta abordagem forneceu intervalos de previsão com um desempenho razoável para a amostra finita, em termos de cobertura média e comprimento médio em ambos os casos, com distribuições normais e não-normais dos erros. Como esperado, o seu comportamento melhora medida que o tamanho da amostra aumenta. Além disso, este método não só dá intervalos de previsão, mas também fornece uma estimativa da distribuição de probabilidade da variável

na sua escala original.

***Bootstrap* em testes de raízes unitárias para séries temporais com volatilidade não estacionária**

A presença de mudanças e permanente volatilidade em importantes variáveis macroeconômicas e financeiras nas economias desenvolvidas são relativamente comuns. Vários estudos mostram que muitas dessas variáveis exibem quebras significativas na volatilidade incondicional. Sensier e Dijk (*apud* CAVALIERE; TAYLOR, 2008) relatam que mais de 80% do conjunto real de dados e das variáveis de preço em Stock e Watson (1999) rejeitam a hipótese nula de variância constante incondicional. Também foram relatadas evidências consideráveis contra a constância das variâncias incondicionais, dos retornos das ações de mercado e das taxas de câmbio. Além disso, Hansen (*apud* CAVALIERE; TAYLOR, 2008) observa que as aplicações empíricas de modelos autoregressivos com volatilidade estocástica para dados financeiros, em geral estimam a raiz dominante no processo de volatilidade estocástica perto do limite de não-estacionariedade. Embora nem as quebras de volatilidade, que seguem um processo estacionário de mudança de Markov, nem as variações de tempo estacionárias das variâncias condicionais (por ex. modelos ARCH), sofram impacto com propriedades em amostras grandes nos testes de raízes unitárias e cointegração, mudanças permanentes na volatilidade podem, no entanto, em grande parte afetar a inferência da raiz unitária.

Soluções para estes problemas são dadas por variantes de testes de raízes unitárias, nos casos de uma única mudança abrupta na volatilidade, ou em processos de múltiplas mudanças com intervalos de transição suaves. Porém, nesse último caso utiliza-se transformação nos dados levando a perdas de eficiência nos testes padrão de raízes unitárias. Neste cenário esses testes não são confiáveis e possuem distribuições nulas assintóticas e não pivotais.

Neste trabalho, Cavaliere e Taylor (2008) propõem uma abordagem do método

Bootstrap para testes de raízes unitárias, que são válidos na presença de uma ampla classe de mudanças permanentes na variância, e incluem casos especiais como processos de transição de volatilidade de forma única e múltipla, abrupta e suave. Uma variação do método *Bootstrap* é empregada aqui para preservar a heterocedasticidade presente nos choques originais. O método proposto não especifica qualquer modelo de paramétrico para o processo de volatilidade.

A validade assintótica dos testes *Bootstrap* propostos dentro da classe de volatilidade não estacionária considerado foi demonstrada. Os experimentos Monte Carlo realizados sugerem que os testes *Bootstrap* de raízes unitárias propostos possuem um bom desempenho em amostras finitas, evitando os problemas que podem ocorrer com os testes-padrão em amostras grandes, na presença de uma variedade de formas de volatilidade não estacionária.

Estudo comparativo do *Bootstrap* paramétrico e não paramétrico para intervalos de referência

Os resultados dos testes clínicos de laboratório são obtidos a partir de milhares de pacientes, e a interpretação desses resultados é um processo de tomada de decisão comparativa que exige um intervalo de referência (IR) para cada teste. Esses valores de referência são necessários em todos os testes realizados em laboratórios clínicos. O valor de referência é obtido por meio da medida de uma quantidade particular em um indivíduo. Os valores de referência não são idênticos para todos os indivíduos, têm uma dispersão denominada distribuição de referência. Em geral, o IR é aceito como o centro do intervalo de 95% da distribuição de referência delimitada pelos percentis 2,5 e 97,5.

De acordo com a Federação Internacional de Química Clínica e Medicina Laboratorial, para determinar o intervalo de referência de base populacional IR de um teste, são necessários 120 indivíduos de referência. No entanto, este tamanho de amostra pode não ser adequado em determinadas situações, por exemplo, uma população de

referência com uma distribuição enviesada. Os indivíduos de uma população são geralmente diferentes uns dos outros e, por conseguinte, a população de referência pode ser heterogênea. Além disso, para algumas faixas etárias, como os recém-nascidos e bebês prematuros, é difícil obter dados suficientes para determinar o IR.

Para superar o problema do tamanho da amostra, o método *Bootstrap* não paramétrico tem sido utilizado em alguns estudos limitados. Nessa pesquisa, Coskun *et al.* (2013) utilizaram o *Bootstrap* não paramétrico para a estimativa dos IRs e dos intervalos de confiança (ICs) associados para os pontos finais dos IRs em amostras de pequeno tamanho ($20 \leq m \leq 120$). Antes de estimativas paramétricas do IRs, os dados foram normalizados. Além disso, pela primeira vez, foi proposto o *Bootstrap* paramétrico aplicado aos dados transformados para a construção de IRs.

Foram selecionados quatro diferentes testes de laboratório: glicose, uréia, creatinina e triglicerídeos. Para avaliar os IRs, foram selecionados 120 indivíduos para cada teste do banco de dados. Em cada experimento foram selecionados aleatoriamente pequenos grupos (indivíduos m , $m = 20, 30, \dots, 120$) a partir de $n = 120$ indivíduos, e aplicados os métodos *Bootstrap* paramétricos e não paramétricos a fim de calcular o IRs e ICs. Os ICs são construídos para obter os pontos de extremidade inferior e superior do IRs e, portanto são chamados de "associados ICs" para os pontos finais do IR.

Os dados de glicose e creatinina são normalmente distribuídos, desta forma o método de *Bootstrap* paramétrico forneceu IRs mais precisos (isto é, o IC associado é mais estreito). Em contraste, os dados de BUN e de triglicéridos não são normalmente distribuídos, e o método *Bootstrap* não paramétrico proporcionou melhores resultados. Com o método *Bootstrap*, o IR e ICs de pequenos grupos foram semelhantes às dos 120 indivíduos necessários para o método não paramétrico, com uma ligeira perda de precisão.

Utilizando os métodos apresentados no trabalho, podem-se obter IRs utilizando amostras menores a custo de alguma incerteza em torno dos pontos finais. Esta pes-

quiza também aponta possíveis aspectos potenciais, como o efeito de assimetria no *Bootstrap* não paramétrico e o nível de desvio da normalidade, que tornaria o *Bootstrap* paramétrico tendencioso. Uma extensa investigação com base em quatro conjuntos de dados não fornecem resultados muito gerais, em especial, para a estimativa do IR por meio do *Bootstrap* não paramétrico. O *Bootstrap* pode ser utilizado para distribuições enviesadas ou até mesmo com distribuições com caudas pesadas, com algum cuidado. O *Bootstrap* não paramétrico é mais robusto para distribuição heterogênea, mas pode exigir amostras maiores em relação ao *Bootstrap* paramétrico em dados não transformados.

Tomados em conjunto, concluiu-se que o *Bootstrap* não paramétrico e o *Bootstrap* paramétrico proposto são métodos simples, confiáveis e podem ser incorporado em laboratórios clínicos.

3 MATERIAL E MÉTODOS

3.1 O PROBLEMA DO QUASE RUÍDO BRANCO

As regiões de “Quase Ruído Branco” foram determinadas aplicando a definição deste processo apresentada na seção 2.3.2. Desta forma, obteve-se a FAC e/ou FACP das estruturas AR(3), MA(3), ARMA(2,1) e ARMA(2,2) em função dos respectivos parâmetros. Determinou-se o espaço paramétrico destes modelos, em que os respectivos valores da FAC e/ou FACP estejam contidos nos intervalos de confiança clássicos, para um dado nível de significância e tamanho n da série fixados.

Assim, deve-se ter $|FAC| < c$ e $|FACP| < c$. Onde a constante $c = f(\alpha, n)$ é o limite superior do intervalo de confiança clássico para a FAC ou para a FACP.

Para determinar as regiões do espaço paramétrico das estruturas AR(3), MA(3) e ARMA(2,2), onde ocorre o problema do “Quase Ruído Branco” descrito na seção (2.3.2), foi utilizado o programa computacional Maple para representar a FAC e a FACP dessas estruturas em função dos parâmetros do modelo. O mesmo *software* foi empregado na representação gráfica destas regiões, e na obtenção dos parâmetros a serem utilizados no estudo de simulação.

3.2 O *BOOTSTRAP* NA IDENTIFICAÇÃO DA ESTRUTURA

A fim de verificar o desempenho do *Bootstrap* na identificação das estruturas descritas na seção anterior, simulou-se séries temporais com 30, 50 e 100 observações colocando os parâmetros nas regiões sujeitas ao “Quase Ruído Branco” e fora delas.

As séries sintéticas possuem uma variância residual $\sigma_a^2 = 0,1$ e seu processo gerador é estacionário com expectância nula. Serão utilizados resíduos Gaussianos em todos os experimentos.

O método *Bootstrap* foi aplicado em cada uma das amostras geradas, executando o algoritmo definido na seção 2.3.3 com número de replicações $B = 10000$. Desta forma foram obtidas as distribuições *Bootstrap* de $\hat{\rho}_k$ e $\hat{\phi}_{kk}$. Por meio dessas distribuições, foram calculados as estimativas *Bootstrap* de $\hat{\rho}_k$ e $\hat{\phi}_{kk}$ e seus respectivos erros padrão. Os intervalos de confiança *Bootstrap*, percentílico assimétrico e percentílico corrigido definidos na seção 2.3.3 foram construídos a fim de testar o poder empírico das hipóteses nulas

$$H_{o1} : [\hat{\rho}_{k_{lo}}^* ; \hat{\rho}_{k_{up}}^*] \supset 0 \quad e \quad H_{o2} : [\hat{\phi}_{kk_{lo}}^* ; \hat{\phi}_{kk_{up}}^*] \supset 0.$$

As hipóteses foram testadas para os 4 primeiros “lags” das FAC e FACP de cada uma das estruturas referenciadas. O nível de confiança de ambos os intervalos é de 90%, e o intervalo percentílico assimétrico é construído com 1% no ramo próximo do zero e 9% na outra extremidade.

Para comparar o desempenho do *Bootstrap*, também foram obtidas as estimativas clássicas de ρ_k e ϕ_{kk} para os três primeiros “lags” por meio das equações (9) e (10). Para cada experimento foram realizadas 100 repetições Monte Carlo. Com esses resultados foram construídos os intervalos de confiança clássicos estabelecidos na seção (2.1.3) para testar as hipóteses nulas

$$H_{o1} : \rho_k = 0; \quad e \quad H_{o2} : \phi_{kk} = 0.$$

Também foram avaliados em todos os experimentos, os estimadores *Bootstrap* do erros padrão de $\hat{\rho}_k$ e $\hat{\phi}_{kk}$ dados por (51) e (52) respectivamente, e a amplitude dos intervalos de confiança obtidos.

O algoritmo para aplicar o método *Bootstrap* em séries temporais, foi implementado na linguagem *Fortran*.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 REGIÃO PARAMÉTRICA DO QUASE RUÍDO BRANCO

4.1.1 Resultado 1 - AR(3)

Seja a estrutura estacionária inversível AR(3) ou seja, aquela com mecanismo gerador de processos estacionários e inversíveis da forma $z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \phi_3 z_{t-3} + a_t$, $t \in T = 1, 3, \dots, n$, onde $\delta \in \mathbb{R}$, $(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in P^3 = \{(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \phi_3^2 + \phi_2 + \phi_1 \phi_3 + \phi_2 \phi_3 + \phi_1 < 1, \phi_3^2 + \phi_2 + \phi_1 \phi_3 - \phi_2 \phi_3 - \phi_1 < 1, \phi_3^2 + \phi_1 \phi_3 + \phi_2 < 1, \phi_3^2 - \phi_1 \phi_3 - \phi_2 < 1, |\phi_3| < 1\}$, $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$, $\sigma_a > 0$, e o nível de significância $\alpha \in (0, 1)$. Então, esta estrutura contém processos do tipo Quase Ruído Branco no sub-espaço $Q^3 \subset P^3$ com $Q^3 = \{(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid c\phi_3^2 + c\phi_2 + c\phi_1 \phi_3 + \phi_2 \phi_3 + \phi_1 - c < 0, c\phi_3^2 + c\phi_2 + c\phi_1 \phi_3 - \phi_2 \phi_3 - \phi_1 - c < 0, c\phi_3^2 + \phi_1 \phi_3 + \phi_2 - c < 0, c\phi_3^2 - \phi_1 \phi_3 - \phi_2 - c < 0, |\phi_3| < c\}$.

Demonstração:

Em modelos AR(p) é importante considerar a forma da FACP, pois a partir de uma defasagem k , $k > p$, seu valor torna-se nulo. A FACP para o modelo AR(3), dada por meio das equações de Yule-Walker é dada por:

$$\phi_{11} = \frac{\phi_1 + \phi_2 \phi_3}{1 - \phi_2 - \phi_1 \phi_3 - \phi_3^2}, \quad k = 1$$

$$\phi_{22} = \frac{-\phi_1 \phi_3 - \phi_2}{\phi_3^2 - 1}, \quad k = 2$$

$$\phi_{33} = \phi_3, \quad k = 3$$

$$\phi_{kk} = 0, \quad k > 3$$

Sub-espço para $|\phi_{11}| < c$

i) $\phi_{11} < c$

$$\frac{\phi_1 + \phi_2 \phi_3}{1 - \phi_2 - \phi_1 \phi_3 - \phi_3^2} < c \quad \Rightarrow \quad \frac{\phi_1 + \phi_2 \phi_3 - c(1 - \phi_2 - \phi_1 \phi_3 - \phi_3^2)}{1 - \phi_2 - \phi_1 \phi_3 - \phi_3^2} < 0$$

O denominador $1 - \phi_2 - \phi_1 \phi_3 - \phi_3^2 > 0$ pois,

$\phi_3^2 + \phi_1 \phi_3 + \phi_2 < 1$, é uma das condições de estacionaridade. Então,

$$c\phi_3^2 + c\phi_2 + c\phi_1\phi_3 + \phi_2\phi_3 + \phi_1 - c < 0 \quad (i)$$

ii) $\phi_{11} > -c$

$$\frac{\phi_1 + \phi_2 \phi_3}{1 - \phi_2 - \phi_1 \phi_3 - \phi_3^2} > -c \quad \Rightarrow \quad \frac{\phi_1 + \phi_2 \phi_3 + c(1 - \phi_2 - \phi_1 \phi_3 - \phi_3^2)}{1 - \phi_2 - \phi_1 \phi_3 - \phi_3^2} > 0 \quad \Rightarrow$$

$$c\phi_3^2 + c\phi_2 + c\phi_1\phi_3 - \phi_2\phi_3 - \phi_1 - c < 0 \quad (ii)$$

As curvas (i) e (ii) estão representadas em azul na figura 14.

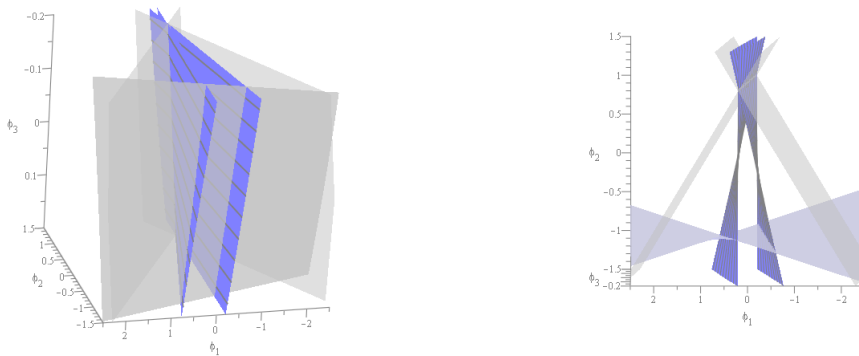


FIGURA 14: Representações das curvas i e ii- AR(3)

Sub-espço para $|\phi_{22}| < c$

iii) $\phi_{22} < c$

$$\phi_{22} = \frac{-\phi_1\phi_3 - \phi_2}{\phi_3^2 - 1} < c \quad \Rightarrow \quad \frac{-\phi_1\phi_3 - \phi_2 - c(\phi_3^2 - 1)}{\phi_3^2 - 1} < 0$$

Como $\phi_3^2 - 1 < 0$, pois $|\phi_3| < 1$, então:

$$c\phi_3^2 + \phi_1\phi_3 + \phi_2 - c < 0 \quad (iii)$$

iv) $\phi_{22} > -c$

$$\phi_{22} = \frac{-\phi_1\phi_3 - \phi_2}{\phi_3^2 - 1} > -c \quad \Rightarrow \quad \frac{-\phi_1\phi_3 - \phi_2 + c(\phi_3^2 - 1)}{\phi_3^2 - 1} > 0 \quad \Rightarrow$$

$$c\phi_3^2 - \phi_1\phi_3 - \phi_2 - c < 0 \quad (iv)$$

Sub-espço para $|\phi_{33}| < c$

v) $|\phi_{33}| < c \quad \Rightarrow \quad -c < \phi_{33} < c$ (v), que está contido em $|\phi_{33}| < 1$, condição de estacionaridade para modelos dessa ordem.

Assim, o sub-espço de Q^3 resultante da intersecção de (i), (ii), (iii), (iv), (v) tem um interior não vazio para algum $|c| < 1$, portanto verifica-se o resultado.

Na figura 15 estão representadas as curvas (i), (ii), (iii), (iv) em azul e vermelho. O conjunto Q^3 corresponde à região limitada pelas curvas (figura 16).

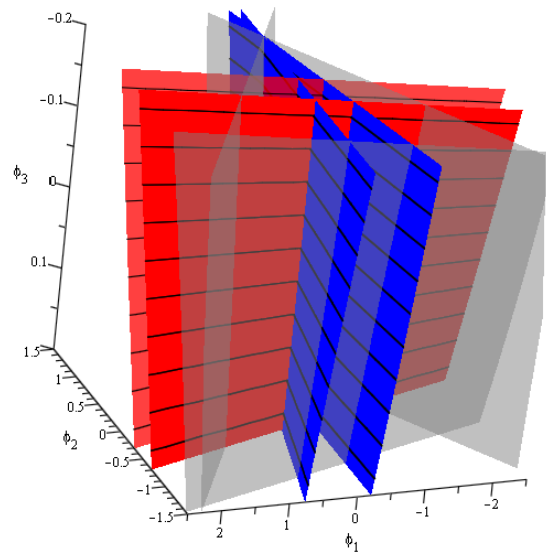


FIGURA 15: Quase Ruído Branco - AR(3) (a)

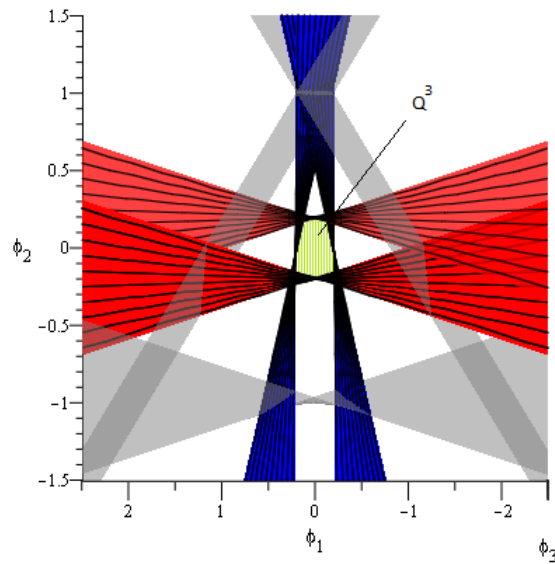


FIGURA 16: Quase Ruído Branco - AR(3) (b)

4.1.2 Resultado 2 - MA(3)

Seja a estrutura estacionária inversível MA(3) ou seja, aquela com mecanismo gerador de processos estacionários e inversíveis da forma $z_t = \delta - \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} +$

$\theta_3 a_{t-3} + a_t, t \in T = 1, 3, \dots, n$, onde $\delta \in \mathbb{R}$, $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in P^3 = \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \theta_3^2 + \theta_2 + \theta_1 \theta_3 + \theta_2 \theta_3 + \theta_1 < 1, \theta_3^2 + \theta_2 + \theta_1 \theta_3 - \theta_2 \theta_3 - \theta_1 < 1, \theta_3^2 + \theta_1 \theta_3 + \theta_2 < 1, \theta_3^2 - \theta_1 \theta_3 - \theta_2 < 1, |\theta_3| < 1\}$, $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$, $\sigma_a > 0$, e o nível de significância $\alpha \in (0, 1)$. Então, esta estrutura contém processos do tipo Quase Ruído Branco no sub-espaço $Q^3 \subset P^3$ com $Q^3 = \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^3 \mid c\theta_3^2 + c\theta_2^2 + c\theta_1^2 + \theta_1 - \theta_1 \theta_2 - \theta_2 \theta_3 + c > 0, c\theta_3^2 + c\theta_2^2 + c\theta_1^2 - \theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_3 + c > 0, c\theta_3^2 + c\theta_2^2 + c\theta_1^2 + \theta_2 - \theta_1 \theta_3 + c > 0, c\theta_3^2 + c\theta_2^2 + c\theta_1^2 - \theta_2 + \theta_1 \theta_3 + c > 0, c\theta_3^2 + c\theta_2^2 + c\theta_1^2 + \theta_3 + c > 0, c\theta_3^2 + c\theta_2^2 + c\theta_1^2 - \theta_3 + c > 0\}$.

Demonstração:

Em modelos MA(q) é importante considerar a forma da FAC, pois a partir de uma defasagem $k, k > p$, seu valor torna-se nulo.

A FAC para o modelo MA(3) é dada por:

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}, \quad k = 1$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2 + \theta_1 \theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}, \quad k = 2$$

$$\rho_3 = -\frac{\theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}, \quad k = 3$$

$$\rho_k = 0, \quad k > 3$$

Sub-espaço para $|\rho_1| < c$

i) $\rho_1 < c$

$$\frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} < c \quad \Rightarrow \quad \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_3 - c(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} < 0$$

Como o denominador $1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 > 0$ então,

$$c\theta_3^2 + c\theta_2^2 + c\theta_1^2 + \theta_1 - \theta_1 \theta_2 - \theta_2 \theta_3 + c > 0 \quad (i)$$

ii) $\rho_1 > -c$

$$\frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} > -c \quad \Rightarrow \quad \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_3 + c(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} > 0$$

$$c\theta_3^2 + c\theta_2^2 + c\theta_1^2 - \theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_3 + c > 0 \quad (ii)$$

As curvas (i) e (ii) estão representadas na figura 17.

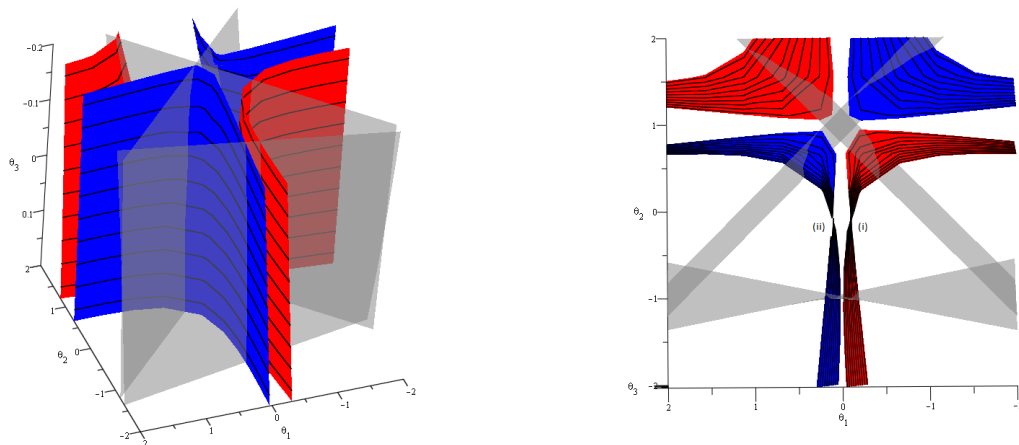


FIGURA 17: Representações das curvas i e ii - MA(3)

Sub-espço para $|\rho_2| < c$

iii) $\rho_2 < c$

$$\frac{-\theta_2 + \theta_1 \theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} < c \quad \Rightarrow \quad \frac{-\theta_2 + \theta_1 \theta_3 - c(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} < 0$$

$$c\theta_3^2 + c\theta_2^2 + c\theta_1^2 + \theta_2 - \theta_1 \theta_3 + c > 0 \quad (iii)$$

iv) $\rho_2 > -c$

$$\frac{-\theta_2 + \theta_1 \theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} > -c \quad \Rightarrow \quad \frac{-\theta_2 + \theta_1 \theta_3 + c(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} > 0$$

$$c\theta_3^2 + c\theta_2^2 + c\theta_1^2 - \theta_2 + \theta_1 \theta_3 + c > 0 \quad (iv)$$

As curvas (iii) e (iv) estão representadas na figura 18.

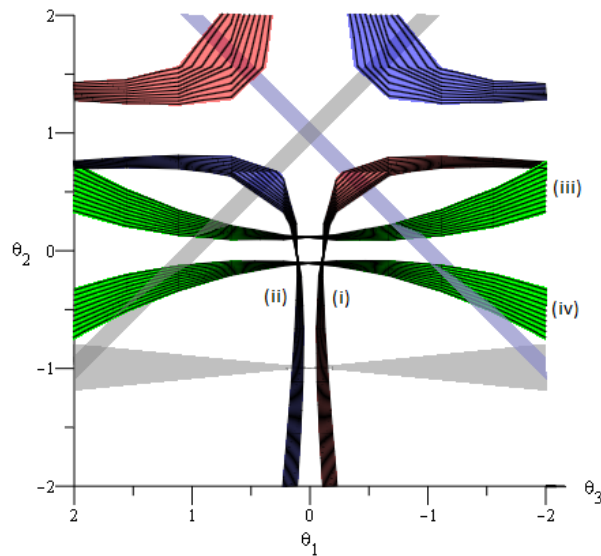


FIGURA 18: Representações das curvas iii e iv - MA(3)

Sub-espaço para $|\rho_3| < c$

v) $\rho_3 < c$

$$\frac{-\theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} < c \quad \Rightarrow \quad \frac{-\theta_3 - c(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} < 0$$

$$c\theta_3^2 + c\theta_2^2 + c\theta_1^2 + \theta_3 + c > 0 \quad (v)$$

vi) $\rho_3 > -c$

$$\frac{-\theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} > -c \quad \Rightarrow \quad \frac{-\theta_3 + c(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} > 0$$

$$c\theta_3^2 + c\theta_2^2 + c\theta_1^2 - \theta_3 + c > 0 \quad (vi)$$

Na figura 19 estão representadas as curvas (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi). O conjunto Q^3 corresponde à região à região limitada pelas curvas (figura 20).

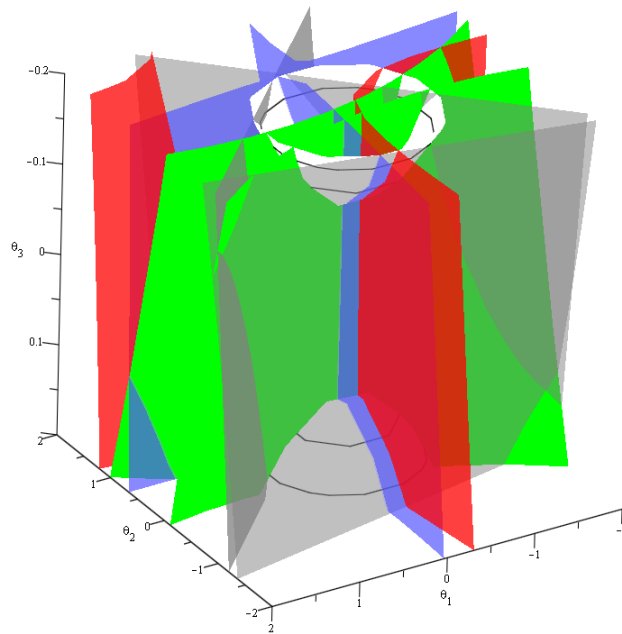


FIGURA 19: Quase Ruído Branco - MA(3) (a)

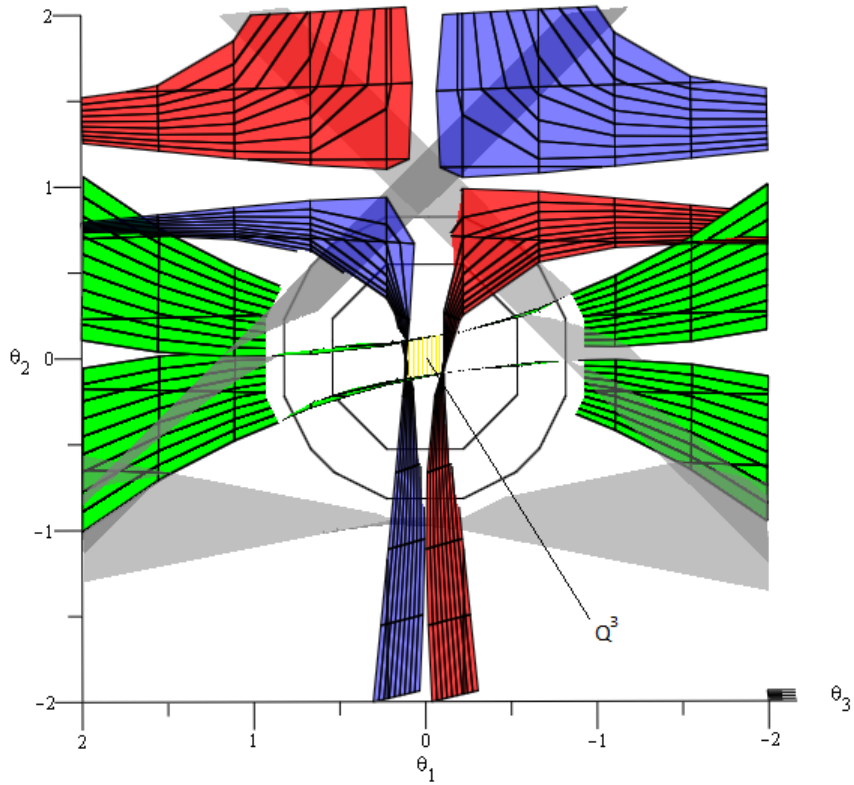


FIGURA 20: Quase Ruído Branco - MA(3) (b)

Assim, o sub-espço de Q^3 resultante da intersecção de $(i), (ii), (iii), (iv), (v)$ e (vi) tem um interior não vazio para algum $|c| < 1$, portanto verifica-se o resultado.

4.1.3 Resultado 3 - ARMA(2,1)

Seja a estrutura estacionária inversível ARMA(2,1) ou seja, aquela com mecanismo gerador de processos estacionários e inversíveis da forma $z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$, $t \in T = 1, 3, \dots, n$, onde $\delta \in \mathbb{R}$, $(\phi_1, \phi_2, \theta_1) \in P^3 = \{(\phi_1, \phi_2, \theta_1) \in \mathbb{R}^3 | \phi_1 + \phi_2 < 1, \phi_2 - \phi_1 < 1, |\phi_2| < 1, |\theta_1| < 1\}$ $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$, $\sigma_a > 0$, e o nível de sig-

nificância $\alpha \in (0, 1)$. Então, esta estrutura contém processos do tipo Quase Ruído Branco no sub-espço $Q^3 \subset P^3$ com $Q^3 = \{(\phi_1, \phi_2, \theta_1) \in \mathbb{R}^3 \mid \theta_1 \phi_2^2 + \phi_1 + \phi_1 \theta_1^2 - \theta_1 - \phi_1^2 \theta_1 + 2c\phi_1 \theta_1 - c + c\phi_2 - c\theta_1^2 + c\theta_1^2 \phi_2 < 0, \theta_1 \phi_2^2 + \phi_1 + \phi_1 \theta_1^2 - \theta_1 - \phi_1^2 \theta_1 - 2c\phi_1 \theta_1 + c - c\phi_2 + c\theta_1^2 - c\theta_1^2 \phi_2 > 0, -\phi_1^2 \theta_1^2 - \phi_1 \theta_1^3 \phi_2 - \phi_2 \phi_1 \theta_1 + \phi_1 \theta_1^3 + \phi_1 \theta_1 + \phi_2 + \theta_1^4 \phi_2 - \theta_1^2 - \theta_1^2 \phi_2^2 - c\phi_1^2 \theta_1^2 + 2c\phi_1 \theta_1 + 2c\phi_1 \theta_1^3 + c\theta_1^2 \phi_2^2 - c - c\theta_1^4 - c\theta_1^2 + 2c\theta_1^2 \phi_2 < 0, -\phi_1^2 \theta_1^2 - \phi_1 \theta_1^3 \phi_2 - \phi_2 \phi_1 \theta_1 + \phi_1 \theta_1^3 + \phi_1 \theta_1 + \phi_2 + \theta_1^4 \phi_2 - \theta_1^2 - \theta_1^2 \phi_2^2 + c\phi_1^2 \theta_1^2 - 2c\phi_1 \theta_1 - 2c\phi_1 \theta_1^3 - c\theta_1^2 \phi_2^2 + c + c\theta_1^4 + c\theta_1^2 - 2c\theta_1^2 \phi_2 > 0\}$.

Demonstração:

Em modelos ARMA(2,1), a FAC tem decaimento exponencial a partir do *lag* 2 e a FACP a partir do *lag* 1, sendo necessário considerar apenas $|\rho_1| < c$, $|\phi_{11}| < c$ e $|\phi_{22}| < c$. A FAC e FACP para o modelo ARMA(2,1), são dadas por:

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 \phi_2^2 - \phi_1 - \phi_1 \theta_1^2 + \theta_1 + \phi_1^2 \theta_1}{2\phi_1 \theta_1 - 1 + \phi_2 - \theta_1^2 + \theta_1^2 \phi_2}, \quad k = 1$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}, \quad k > 1$$

$$\phi_{11} = \rho_1, \quad k = 1$$

$$\phi_{22} = -\frac{\phi_1^2 \theta_1^2 + \phi_1 \theta_1^3 \phi_2 + \phi_2 \phi_1 \theta_1 - \phi_1 \theta_1^3 - \phi_1 \theta_1 - \phi_2 - \theta_1^4 \phi_2 + \theta_1^2 + \theta_1^2 \phi_2^2}{\phi_1^2 \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1 - 2\phi_1 \theta_1^3 - \theta_1^2 \phi_2^2 + 1 + \theta_1^4 + \theta_1^2 - 2\theta_1^2 \phi_2}, \quad k = 2$$

Sub-espço para $|\phi_{11}| < c$

i) $\phi_{11} < c$

$$\frac{-\theta_1 \phi_2^2 - \phi_1 - \phi_1 \theta_1^2 + \theta_1 + \phi_1^2 \theta_1}{2\phi_1 \theta_1 - 1 + \phi_2 - \theta_1^2 + \theta_1^2 \phi_2} < c \Rightarrow$$

$$\frac{\theta_1 \phi_2^2 + \phi_1 + \phi_1 \theta_1^2 - \theta_1 - \phi_1^2 \theta_1 - c(-2\phi_1 \theta_1 + 1 - \phi_2 + \theta_1^2 - \theta_1^2 \phi_2)}{-2\phi_1 \theta_1 + 1 - \phi_2 + \theta_1^2 - \theta_1^2 \phi_2} < 0$$

O denominador $-2\phi_1\theta_1 + 1 - \phi_2 + \theta_1^2 - \theta_1^2\phi_2 > 0$ pois é combinação das condições de estacionaridade e invertibilidade para a estrutura. Então,

$$\theta_1\phi_2^2 + \phi_1 + \phi_1\theta_1^2 - \theta_1 - \phi_1^2\theta_1 + 2c\phi_1\theta_1 - c + c\phi_2 - c\theta_1^2 + c\theta_1^2\phi_2 < 0 \quad (i)$$

ii) $\phi_{11} > -c$

$$\frac{\theta_1\phi_2^2 + \phi_1 + \phi_1\theta_1^2 - \theta_1 - \phi_1^2\theta_1 + c(-2\phi_1\theta_1 + 1 - \phi_2 + \theta_1^2 - \theta_1^2\phi_2)}{-2\phi_1\theta_1 + 1 - \phi_2 + \theta_1^2 - \theta_1^2\phi_2} > 0 \Rightarrow$$

$$\theta_1\phi_2^2 + \phi_1 + \phi_1\theta_1^2 - \theta_1 - \phi_1^2\theta_1 - 2c\phi_1\theta_1 + c - c\phi_2 + c\theta_1^2 - c\theta_1^2\phi_2 > 0 \quad (ii)$$

As curvas (i) e (ii) estão representadas na figura 21.

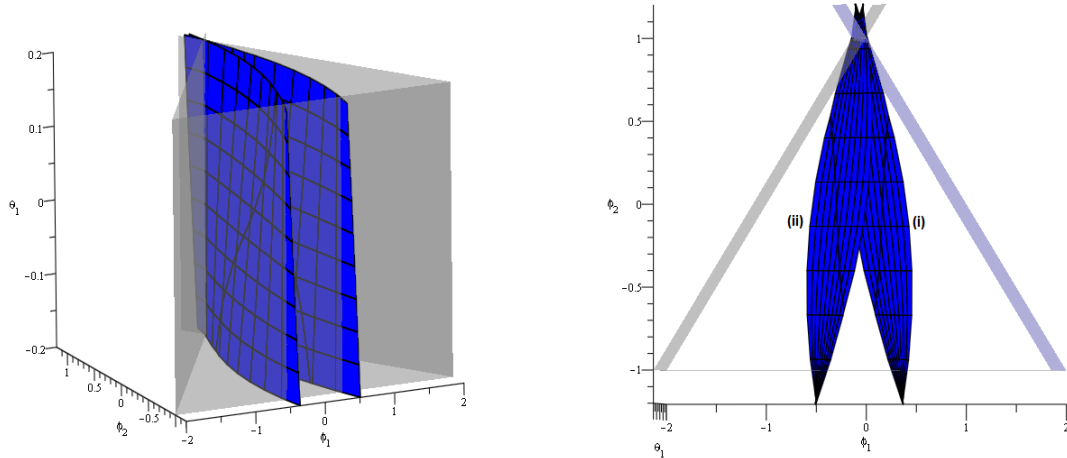


FIGURA 21: Representações das curvas i e ii - ARMA(2,1)

Sub-espço para $|\phi_{22}| < c$

iii) $\phi_{22} < c$

$$-\frac{\phi_1^2\theta_1^2 + \phi_1\theta_1^3\phi_2 + \phi_2\phi_1\theta_1 - \phi_1\theta_1^3 - \phi_1\theta_1 - \phi_2 - \theta_1^4\phi_2 + \theta_1^2 + \theta_1^2\phi_2^2}{\phi_1^2\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1 - 2\phi_1\theta_1^3 - \theta_1^2\phi_2^2 + 1 + \theta_1^4 + \theta_1^2 - 2\theta_1^2\phi_2} < c \Rightarrow$$

$$-\frac{\phi_1^2\theta_1^2 + \phi_1\theta_1^3\phi_2 + \phi_2\phi_1\theta_1 - \phi_1\theta_1^3 - \phi_1\theta_1 - \phi_2 - \theta_1^4\phi_2 + \theta_1^2 + \theta_1^2\phi_2^2}{\phi_1^2\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1 - 2\phi_1\theta_1^3 - \theta_1^2\phi_2^2 + 1 + \theta_1^4}$$

$$+\frac{-c(\phi_1^2\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1 - 2\phi_1\theta_1^3 - \theta_1^2\phi_2^2 + 1 + \theta_1^4 + \theta_1^2 - 2\theta_1^2\phi_2)}{\phi_1^2\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1 - 2\phi_1\theta_1^3 - \theta_1^2\phi_2^2 + 1 + \theta_1^4 + \theta_1^2 - 2\theta_1^2\phi_2} < 0 \Rightarrow$$

$$-\phi_1^2\theta_1^2 - \phi_1\theta_1^3\phi_2 - \phi_2\phi_1\theta_1 + \phi_1\theta_1^3 + \phi_1\theta_1 + \phi_2 + \theta_1^4\phi_2 - \theta_1^2 - \theta_1^2\phi_2^2 - c\phi_1^2\theta_1^2 + 2c\phi_1\theta_1 + 2c\phi_1\theta_1^3 + c\theta_1^2\phi_2^2 - c - c\theta_1^4 - c\theta_1^2 + 2c\theta_1^2\phi_2 < 0 \quad (iii)$$

iv) $\phi_{22} > -c$

$$-\frac{\phi_1^2\theta_1^2 + \phi_1\theta_1^3\phi_2 + \phi_2\phi_1\theta_1 - \phi_1\theta_1^3 - \phi_1\theta_1 - \phi_2 - \theta_1^4\phi_2 + \theta_1^2 + \theta_1^2\phi_2^2}{\phi_1^2\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1 - 2\phi_1\theta_1^3 - \theta_1^2\phi_2^2 + 1 + \theta_1^4 + \theta_1^2 - 2\theta_1^2\phi_2}$$

$$+\frac{c(\phi_1^2\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1 - 2\phi_1\theta_1^3 - \theta_1^2\phi_2^2 + 1 + \theta_1^4 + \theta_1^2 - 2\theta_1^2\phi_2)}{\phi_1^2\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1 - 2\phi_1\theta_1^3 - \theta_1^2\phi_2^2 + 1 + \theta_1^4 + \theta_1^2 - 2\theta_1^2\phi_2} > 0 \Rightarrow$$

$$-\phi_1^2\theta_1^2 - \phi_1\theta_1^3\phi_2 - \phi_2\phi_1\theta_1 + \phi_1\theta_1^3 + \phi_1\theta_1 + \phi_2 + \theta_1^4\phi_2 - \theta_1^2 - \theta_1^2\phi_2^2 + c\phi_1^2\theta_1^2 - 2c\phi_1\theta_1 - 2c\phi_1\theta_1^3 - c\theta_1^2\phi_2^2 + c + c\theta_1^4 + c\theta_1^2 - 2c\theta_1^2\phi_2 > 0 \quad (iv)$$

Na figura 22 estão representadas as curvas (i), (ii), (iii), (iv). O conjunto Q^3 corresponde à região limitada pelas curvas (figura 23). Assim, o sub-espaco de Q^3 resultante da intersecção de (i), (ii), (iii), (iv) tem um interior não vazio para algum $|c| < 1$, portanto verifica-se o resultado.

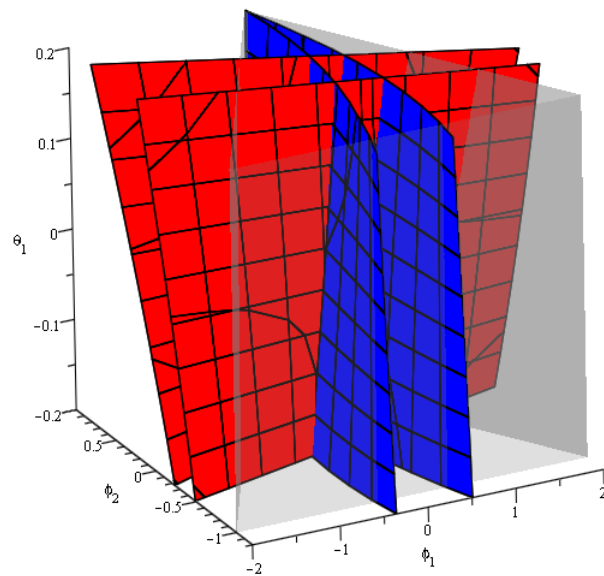


FIGURA 22: Quase Ruído Branco - ARMA(2,1) (a)

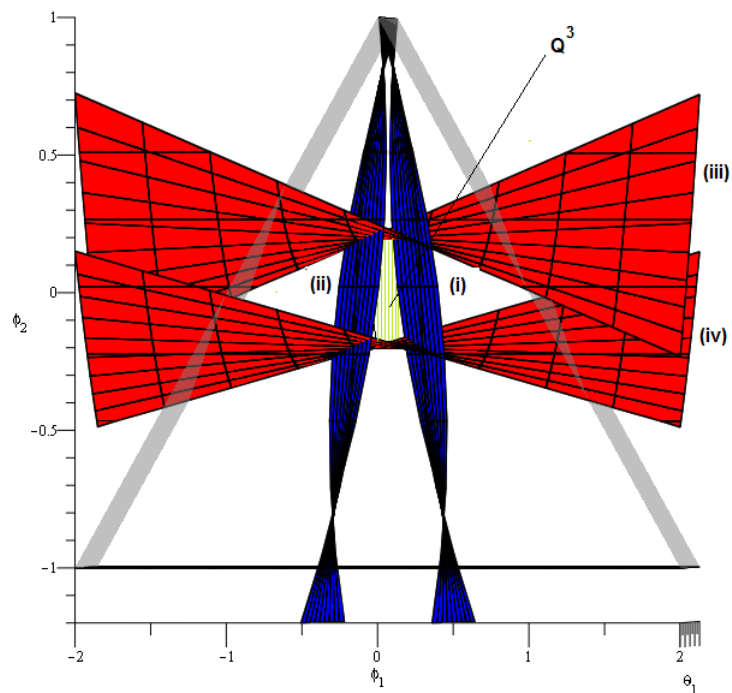


FIGURA 23: Quase Ruído Branco - ARMA(2,1) (b)

4.1.4 Resultado 4 - ARMA(2,2)

Seja a estrutura estacionária inversível ARMA(2,2) ou seja, aquela com mecanismo gerador de processos estacionários e inversíveis da forma $z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} +$

$\phi_2 z_{t-2} - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} + a_t, t \in T = 1, 3, \dots, n$, onde $\delta \in \mathbb{R}$, $(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2) \in P^4 = \{(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2) \in \mathbb{R}^4 \mid \phi_1 + \phi_2 < 1, \phi_2 - \phi_1 < 1, |\phi_2| < 1, \theta_1 + \theta_2 < 1, \theta_2 - \theta_1 < 1, |\theta_2| < 1, a_t \sim N(0, \sigma_a^2) \mid \sigma_a > 0\}$, e o nível de significância $\alpha \in (0, 1)$. Então, esta estrutura contém processos do tipo Quase Ruído Branco no sub-espaço $Q^4 \subset P^4$ com $Q^4 = \{ -c - \theta_2 \theta_1 \phi_1^2 \phi_2 + \phi_1 - \theta_1 + 3 \phi_1 \theta_2 \phi_2^2 + \phi_1^3 \theta_2 \phi_2 + \theta_2 \theta_1 \phi_1^2 - \theta_2 \theta_1 \phi_2^2 + \theta_1 \phi_1^2 \phi_2 - \phi_1 \theta_2^2 \phi_2 - \phi_1 \theta_1^2 \phi_2 + 3 \phi_1 \theta_2 \phi_2 - \phi_1 \theta_2 \phi_2^3 - \theta_2 \theta_1 \phi_2 + \theta_2 \theta_1 \phi_2^3 - \phi_1 \phi_2 + \theta_1 \phi_2 - \phi_1 \theta_2 - \phi_1^3 \theta_2 + \phi_1 \theta_2^2 - \theta_1 \phi_1^2 + \phi_1 \theta_1^2 + \theta_2 \theta_1 + \theta_1 \phi_2^2 - \theta_1 \phi_2^3 + 2c \theta_2 \phi_2^3 - c \theta_2^2 \phi_2^2 - 2c \phi_2 \phi_1 \theta_1 - 2c \phi_2 \phi_1^2 \theta_2 + 2c \phi_2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 + 2c \phi_2 - c \theta_1^2 - c \theta_2^2 - c \phi_2^2 + 2c \phi_1 \theta_1 - 2c \theta_2 \phi_2 + 2c \phi_1^2 \theta_2 + 2c \theta_1^2 \phi_2 + 2c \theta_2^2 \phi_2 - c \theta_1^2 \phi_2^2 - 2c \phi_1 \theta_2 \theta_1 < 0, c - \theta_2 \theta_1 \phi_1^2 \phi_2 + \phi_1 - \theta_1 + 3 \phi_1 \theta_2 \phi_2^2 + \phi_1^3 \theta_2 \phi_2 + \theta_2 \theta_1 \phi_1^2 - \theta_2 \theta_1 \phi_2^2 + \theta_1 \phi_1^2 \phi_2 - \phi_1 \theta_2^2 \phi_2 - \phi_1 \theta_1^2 \phi_2 + 3 \phi_1 \theta_2 \phi_2 - \phi_1 \theta_2 \phi_2^3 - \theta_2 \theta_1 \phi_2 + \theta_2 \theta_1 \phi_2^3 - \phi_1 \phi_2 + \theta_1 \phi_2 - \phi_1 \theta_2 - \phi_1^3 \theta_2 + \phi_1 \theta_2^2 - \theta_1 \phi_1^2 + \phi_1 \theta_1^2 + \theta_2 \theta_1 + \theta_1 \phi_2^2 - \theta_1 \phi_2^3 - 2c \theta_2 \phi_2^3 + c \theta_2^2 \phi_2^2 + 2c \phi_2 \phi_1 \theta_1 + 2c \phi_2 \phi_1^2 \theta_2 - 2c \phi_2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 - 2c \phi_2 + c \theta_1^2 + c \theta_2^2 + c \phi_2^2 - 2c \phi_1 \theta_1 + 2c \theta_2 \phi_2 - 2c \phi_1^2 \theta_2 - 2c \theta_1^2 \phi_2 - 2c \theta_2^2 \phi_2 + c \theta_1^2 \phi_2^2 + 2c \phi_1 \theta_2 \theta_1 > 0, -c + \phi_2 - \theta_2 + \phi_1^2 - 2 \phi_2^2 + \phi_2^3 + \phi_1 \theta_2 \theta_1 - \phi_2 \phi_1 \theta_1 + 2c \theta_2 \phi_2^3 - c \theta_2^2 \phi_2^2 + \theta_1^2 \phi_2 + \theta_2^2 \phi_2 - \phi_1 \theta_1 + 2 \theta_2 \phi_2 + 2 \theta_2 \phi_2^2 + \phi_2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 - 2c \phi_2 \phi_1 \theta_1 - 2c \phi_2 \phi_1^2 \theta_2 + 2c \phi_2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 - 2 \theta_2 \phi_2^3 - 2 \theta_1^2 \phi_2^2 - 2 \theta_2^2 \phi_2^2 + 2c \phi_2 - c \theta_1^2 - c \theta_2^2 - c \phi_2^2 + 2c \phi_1 \theta_1 + \phi_2 \phi_1^2 \theta_2 - 2c \theta_2 \phi_2 + 2c \phi_1^2 \theta_2 + 2c \theta_1^2 \phi_2 + 2c \theta_2^2 \phi_2 - c \theta_1^2 \phi_2^2 - 2c \phi_1 \theta_2 \theta_1 - 3 \phi_1 \theta_2 \theta_1 \phi_2^2 + \phi_1 \theta_2 \theta_1 \phi_2^3 + 4 \phi_1^2 \theta_2 \phi_2^2 + \phi_1^4 \theta_2 \phi_2 - \phi_1^2 \theta_1^2 \phi_2 + \theta_1 \phi_1^3 \phi_2 - \phi_1^2 \theta_2^2 \phi_2 - \phi_1 \theta_1 \phi_2^3 + \phi_1^3 \theta_2 \theta_1 + 3 \phi_1 \theta_1 \phi_2^2 - \phi_1^2 \theta_2 \phi_2^3 - \phi_1^4 \theta_2 + \phi_1^2 \theta_1^2 - \theta_1 \phi_1^3 + \theta_1^2 \phi_2^3 + \phi_1^2 \theta_2^2 - \theta_2 \phi_2^4 - \theta_2 \theta_1 \phi_1^3 \phi_2 + \theta_2^2 \phi_2^3 - \phi_1^2 \phi_2 < 0, c + \phi_2 - \theta_2 + \phi_1^2 - 2 \phi_2^2 + \phi_2^3 + \phi_1 \theta_2 \theta_1 - \phi_2 \phi_1 \theta_1 - 2c \theta_2 \phi_2^3 + c \theta_2^2 \phi_2^2 + \theta_1^2 \phi_2 + \theta_2^2 \phi_2 - \phi_1 \theta_1 + 2 \theta_2 \phi_2 + 2 \theta_2 \phi_2^2 + \phi_2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 + 2c \phi_2 \phi_1 \theta_1 + 2c \phi_2 \phi_1^2 \theta_2 - 2c \phi_2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 - 2 \theta_2 \phi_2^3 - 2 \theta_1^2 \phi_2^2 - 2 \theta_2^2 \phi_2^2 - 2c \phi_2 + c \theta_1^2 + c \theta_2^2 + c \phi_2^2 - 2c \phi_1 \theta_1 + \phi_2 \phi_1^2 \theta_2 + 2c \theta_2 \phi_2 - 2c \phi_1^2 \theta_2 - 2c \theta_1^2 \phi_2 - 2c \theta_2^2 \phi_2 + c \theta_1^2 \phi_2^2 + 2c \phi_1 \theta_2 \theta_1 - 3 \phi_1 \theta_2 \theta_1 \phi_2^2 + \phi_1 \theta_2 \theta_1 \phi_2^3 + 4 \phi_1^2 \theta_2 \phi_2^2 + \phi_1^4 \theta_2 \phi_2 - \phi_1^2 \theta_1^2 \phi_2 + \theta_1 \phi_1^3 \phi_2 - \phi_1^2 \theta_2^2 \phi_2 - \phi_1 \theta_1 \phi_2^3 + \phi_1^3 \theta_2 \theta_1 + 3 \phi_1 \theta_1 \phi_2^2 - \phi_1^2 \theta_2 \phi_2^3 - \phi_1^4 \theta_2 + \phi_1^2 \theta_1^2 - \theta_1 \phi_1^3 + \theta_1^2 \phi_2^3 + \phi_1^2 \theta_2^2 - \theta_2 \phi_2^4 - \theta_2 \theta_1 \phi_1^3 \phi_2 + \theta_2^2 \phi_2^3 - \phi_1^2 \phi_2 > 0 \}.$

Demonstração:

Em modelos ARMA(2,2) a FAC e a FACP têm decaimentos exponenciais a partir do lag 2, sendo necessário considerar apenas $|\rho_1| < c$ e $|\rho_2| < c$ para determinar a região de “Quase Ruído Branco”.

A FAC para o modelo ARMA(2,2) é dada por:

$$\rho_1 = \frac{\phi_1 - \theta_1 - \phi_1 \phi_2 + \theta_1 \phi_2 - \phi_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1 - \theta_2 \theta_1 \phi_1^2 \phi_2 - \theta_2 \theta_1 \phi_2^2 + 3 \phi_1 \theta_2 \phi_2^2 + \phi_1^3 \theta_2 \phi_2 - \phi_1 \theta_2^2 \phi_2 + \theta_1 \phi_1^2 \phi_2 + \phi_1 \theta_1^2 \phi_2}{(-1 + \phi_2)(-1 - 2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 + 2 \phi_1 \theta_1 - 2 \theta_2 \phi_2 + 2 \theta_2 \phi_1^2 - 2 \theta_2 \phi_2^2 + \theta_1^2 \phi_2 + \theta_2^2 \phi_2 + \phi_2 - \theta_1^2 - \theta_2^2)} + \frac{3 \phi_1 \theta_2 \phi_2 - \phi_1 \theta_2 \phi_2^3 + \theta_2 \theta_1 \phi_1^2 - \theta_2 \theta_1 \phi_2 + \theta_2 \theta_1 \phi_2^3 - \theta_1 \phi_1^2 - \phi_1^3 \theta_2 + \phi_1 \theta_1^2 + \phi_1 \theta_2^2 + \theta_1 \phi_2^2 - \theta_1 \phi_2^3}{(-1 + \phi_2)(-1 - 2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 + 2 \phi_1 \theta_1 - 2 \theta_2 \phi_2 + 2 \theta_2 \phi_1^2 - 2 \theta_2 \phi_2^2 + \theta_1^2 \phi_2 + \theta_2^2 \phi_2 + \phi_2 - \theta_1^2 - \theta_2^2)}, \quad k = 1$$

$$\rho_2 = \frac{\phi_2 - \theta_2 + \phi_1^2 - 2 \phi_2^2 + \phi_2^3 + \phi_1 \theta_2 \theta_1 + \theta_1^2 \phi_2 + \theta_2^2 \phi_2 - \phi_1 \theta_1 + 2 \theta_2 \phi_2 + 2 \theta_2 \phi_2^2 + \phi_1 \theta_2 \theta_1 \phi_2 + \phi_1 \theta_2 \theta_1 \phi_2^3}{(-1 + \phi_2)(-1 - 2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 + 2 \phi_1 \theta_1 - 2 \theta_2 \phi_2 + 2 \theta_2 \phi_1^2 - 2 \theta_2 \phi_2^2 + \theta_1^2 \phi_2 + \theta_2^2 \phi_2 + \phi_2 - \theta_1^2 - \theta_2^2)} - \frac{\theta_2 \theta_1 \phi_1^3 \phi_2 - 3 \phi_1 \theta_2 \theta_1 \phi_2^2 + \phi_1^4 \theta_2 \phi_2 - \phi_1 \theta_1 \phi_2 + \theta_1 \phi_1^3 \phi_2 - \phi_1^2 \theta_1^2 \phi_2 + \phi_1^3 \theta_2 \theta_1 + \phi_1^2 \theta_2 \phi_2 - \phi_1^2 \theta_2 \phi_2^3}{(-1 + \phi_2)(-1 - 2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 + 2 \phi_1 \theta_1 - 2 \theta_2 \phi_2 + 2 \theta_2 \phi_1^2 - 2 \theta_2 \phi_2^2 + \theta_1^2 \phi_2 + \theta_2^2 \phi_2 + \phi_2 - \theta_1^2 - \theta_2^2)} - \frac{\phi_1^2 \theta_2^2 \phi_2 - \phi_1 \theta_1 \phi_2^3 + 4 \phi_1^2 \theta_2 \phi_2^2 + 3 \phi_1 \theta_1 \phi_2^2 - \theta_2 \phi_2^4 + \theta_1^2 \phi_2^3 + \theta_2^2 \phi_2^3 - \phi_1^2 \phi_2 - \phi_1^3 \theta_1 - \theta_2 \phi_1^4}{(-1 + \phi_2)(-1 - 2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 + 2 \phi_1 \theta_1 - 2 \theta_2 \phi_2 + 2 \theta_2 \phi_1^2 - 2 \theta_2 \phi_2^2 + \theta_1^2 \phi_2 + \theta_2^2 \phi_2 + \phi_2 - \theta_1^2 - \theta_2^2)} + \frac{\phi_1^2 \theta_1^2 + \phi_1^2 \theta_2^2 - 2 \theta_2 \phi_2^3 - 2 \theta_1^2 \phi_2^2 - 2 \theta_2^2 \phi_2^2}{(-1 + \phi_2)(-1 - 2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 + 2 \phi_1 \theta_1 - 2 \theta_2 \phi_2 + 2 \theta_2 \phi_1^2 - 2 \theta_2 \phi_2^2 + \theta_1^2 \phi_2 + \theta_2^2 \phi_2 + \phi_2 - \theta_1^2 - \theta_2^2)}, \quad k = 2$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}, \quad k > p$$

Sub-espaço para $|\rho_1| < c$

i) $\rho_1 < c$

Das condições de estacionariedade e invertibilidade da estrutura ARMA(2,2), tem-se o denominador de ρ_1 , $(-1 + \phi_2)(-1 - 2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 + 2 \phi_1 \theta_1 - 2 \theta_2 \phi_2 + 2 \theta_2 \phi_1^2 - 2 \theta_2 \phi_2^2 + \theta_1^2 \phi_2 + \theta_2^2 \phi_2 + \phi_2 - \theta_1^2 - \theta_2^2) > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} & -\theta_2 \theta_1 \phi_1^2 \phi_2 + \phi_1 - \theta_1 + 3 \phi_1 \theta_2 \phi_2^2 + \phi_1^3 \theta_2 \phi_2 + \theta_2 \theta_1 \phi_1^2 - \theta_2 \theta_1 \phi_2^2 + \theta_1 \phi_1^2 \phi_2 - \phi_1 \theta_2^2 \phi_2 - \phi_1 \theta_1^2 \phi_2 \\ & + 3 \phi_1 \theta_2 \phi_2 - \phi_1 \theta_2 \phi_2^3 - \theta_2 \theta_1 \phi_2 + \theta_2 \theta_1 \phi_2^3 - \phi_1 \phi_2 + \theta_1 \phi_2 - \phi_1 \theta_2 - \phi_1^3 \theta_2 + \phi_1 \theta_2^2 - \theta_1 \phi_1^2 + \phi_1 \theta_1^2 + \\ & \theta_2 \theta_1 + \theta_1 \phi_2^2 - \theta_1 \phi_2^3 - c(-1 + \phi_2)(-1 - 2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 + 2 \phi_1 \theta_1 - 2 \theta_2 \phi_2 + 2 \phi_1^2 \theta_2 - 2 \theta_2 \phi_2^2 + \theta_1^2 \phi_2 \\ & + \theta_2^2 \phi_2 + \phi_2 - \theta_1^2 - \theta_2^2) < 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -c - \theta_2 \theta_1 \phi_1^2 \phi_2 + \phi_1 - \theta_1 + 3 \phi_1 \theta_2 \phi_2^2 + \phi_1^3 \theta_2 \phi_2 + \theta_2 \theta_1 \phi_1^2 - \theta_2 \theta_1 \phi_2^2 + \theta_1 \phi_1^2 \phi_2 - \phi_1 \theta_2^2 \phi_2 - \\
& \phi_1 \theta_1^2 \phi_2 + 3 \phi_1 \theta_2 \phi_2 - \phi_1 \theta_2 \phi_2^3 - \theta_2 \theta_1 \phi_2 + \theta_2 \theta_1 \phi_2^3 - \phi_1 \phi_2 + \theta_1 \phi_2 - \phi_1 \theta_2 - \phi_1^3 \theta_2 + \phi_1 \theta_2^2 - \theta_1 \phi_1^2 \\
& + \phi_1 \theta_1^2 + \theta_2 \theta_1 + \theta_1 \phi_2^2 - \theta_1 \phi_2^3 + 2c \theta_2 \phi_2^3 - c \theta_2^2 \phi_2^2 - 2c \phi_2 \phi_1 \theta_1 - 2c \phi_2 \phi_1^2 \theta_2 + 2c \phi_2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 + \\
& 2c \phi_2 - c \theta_1^2 - c \theta_2^2 - c \phi_2^2 + 2c \phi_1 \theta_1 - 2c \theta_2 \phi_2 + 2c \phi_1^2 \theta_2 + 2c \theta_1^2 \phi_2 + 2c \theta_2^2 \phi_2 - c \theta_1^2 \phi_2^2 - \\
& 2c \phi_1 \theta_2 \theta_1 < 0 \quad (i).
\end{aligned}$$

ii) $\rho_1 > -c$

$$\begin{aligned}
& -\theta_2 \theta_1 \phi_1^2 \phi_2 + \phi_1 - \theta_1 + 3 \phi_1 \theta_2 \phi_2^2 + \phi_1^3 \theta_2 \phi_2 + \theta_2 \theta_1 \phi_1^2 - \theta_2 \theta_1 \phi_2^2 + \theta_1 \phi_1^2 \phi_2 - \phi_1 \theta_2^2 \phi_2 - \phi_1 \theta_1^2 \phi_2 \\
& + 3 \phi_1 \theta_2 \phi_2 - \phi_1 \theta_2 \phi_2^3 - \theta_2 \theta_1 \phi_2 + \theta_2 \theta_1 \phi_2^3 - \phi_1 \phi_2 + \theta_1 \phi_2 - \phi_1 \theta_2 - \phi_1^3 \theta_2 + \phi_1 \theta_2^2 - \theta_1 \phi_1^2 + \phi_1 \theta_1^2 + \\
& \theta_2 \theta_1 + \theta_1 \phi_2^2 - \theta_1 \phi_2^3 + c(-1 + \phi_2) (-1 - 2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 + 2 \phi_1 \theta_1 - 2 \theta_2 \phi_2 + 2 \phi_1^2 \theta_2 - 2 \theta_2 \phi_2^2 + \theta_1^2 \phi_2 \\
& + \theta_2^2 \phi_2 + \phi_2 - \theta_1^2 - \theta_2^2) > 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c - \theta_2 \theta_1 \phi_1^2 \phi_2 + \phi_1 - \theta_1 + 3 \phi_1 \theta_2 \phi_2^2 + \phi_1^3 \theta_2 \phi_2 + \theta_2 \theta_1 \phi_1^2 - \theta_2 \theta_1 \phi_2^2 + \theta_1 \phi_1^2 \phi_2 - \phi_1 \theta_2^2 \phi_2 - \\
& \phi_1 \theta_1^2 \phi_2 + 3 \phi_1 \theta_2 \phi_2 - \phi_1 \theta_2 \phi_2^3 - \theta_2 \theta_1 \phi_2 + \theta_2 \theta_1 \phi_2^3 - \phi_1 \phi_2 + \theta_1 \phi_2 - \phi_1 \theta_2 - \phi_1^3 \theta_2 + \phi_1 \theta_2^2 - \theta_1 \phi_1^2 + \\
& \phi_1 \theta_1^2 + \theta_2 \theta_1 + \theta_1 \phi_2^2 - \theta_1 \phi_2^3 - 2c \theta_2 \phi_2^3 + c \theta_2^2 \phi_2^2 + 2c \phi_2 \phi_1 \theta_1 + 2c \phi_2 \phi_1^2 \theta_2 - 2c \phi_2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 - \\
& 2c \phi_2 + c \theta_1^2 + c \theta_2^2 + c \phi_2^2 - 2c \phi_1 \theta_1 + 2c \theta_2 \phi_2 - 2c \phi_1^2 \theta_2 - 2c \theta_1^2 \phi_2 - 2c \theta_2^2 \phi_2 + c \theta_1^2 \phi_2^2 + \\
& 2c \phi_1 \theta_2 \theta_1 > 0 \quad (ii)
\end{aligned}$$

Sub-espço para $|\rho_2| < c$

i) $\rho_2 < c$

$$\begin{aligned}
& \phi_2 - \theta_2 + \phi_1^2 - 2 \phi_2^2 + \phi_2^3 + \phi_1 \theta_2 \theta_1 - c(-1 + \phi_2) (-1 - 2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 + 2 \phi_1 \theta_1 - 2 \theta_2 \phi_2 + 2 \phi_1^2 \theta_2 - \\
& 2 \theta_2 \phi_2^2 + \theta_1^2 \phi_2 + \theta_2^2 \phi_2 + \phi_2 - \theta_1^2 - \theta_2^2) - \phi_2 \phi_1 \theta_1 + \theta_1^2 \phi_2 + \theta_2^2 \phi_2 - \phi_1 \theta_1 + 2 \theta_2 \phi_2 + 2 \theta_2 \phi_2^2 + \\
& \phi_2 \phi_1 \theta_2 \theta_1 - 2 \theta_2 \phi_2^3 - 2 \theta_1^2 \phi_2^2 - 2 \theta_2^2 \phi_2^2 + \phi_2 \phi_1^2 \theta_2 - 3 \phi_1 \theta_2 \theta_1 \phi_2^2 + \phi_1 \theta_2 \theta_1 \phi_2^3 + 4 \phi_1^2 \theta_2 \phi_2^2 + \\
& \phi_1^4 \theta_2 \phi_2 - \phi_1^2 \theta_1^2 \phi_2 + \theta_1 \phi_1^3 \phi_2 - \phi_1^2 \theta_2^2 \phi_2 - \phi_1 \theta_1 \phi_2^3 + \phi_1^3 \theta_2 \theta_1 + 3 \phi_1 \theta_1 \phi_2^2 - \phi_1^2 \theta_2 \phi_2^3 - \phi_1^4 \theta_2 + \\
& \phi_1^2 \theta_1^2 - \theta_1 \phi_1^3 + \theta_1^2 \phi_2^3 + \phi_1^2 \theta_2^2 - \theta_2 \phi_2^4 - \theta_2 \theta_1 \phi_1^3 \phi_2 + \theta_2^2 \phi_2^3 - \phi_1^2 \phi_2 < 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -c + \phi_2 - \theta_2 + \phi_1^2 - 2\phi_2^2 + \phi_2^3 + \phi_1\theta_2\theta_1 - \phi_2\phi_1\theta_1 + 2c\theta_2\phi_2^3 - c\theta_2^2\phi_2^2 + \theta_1^2\phi_2 + \theta_2^2\phi_2 - \\
& \phi_1\theta_1 + 2\theta_2\phi_2 + 2\theta_2\phi_2^2 + \phi_2\phi_1\theta_2\theta_1 - 2c\phi_2\phi_1\theta_1 - 2c\phi_2\phi_1^2\theta_2 + 2c\phi_2\phi_1\theta_2\theta_1 - 2\theta_2\phi_2^3 - 2\theta_1^2\phi_2^2 - \\
& 2\theta_2^2\phi_2^2 + 2c\phi_2 - c\theta_1^2 - c\theta_2^2 - c\phi_2^2 + 2c\phi_1\theta_1 + \phi_2\phi_1^2\theta_2 - 2c\theta_2\phi_2 + 2c\phi_1^2\theta_2 + 2c\theta_1^2\phi_2 + \\
& 2c\theta_2^2\phi_2 - c\theta_1^2\phi_2^2 - 2c\phi_1\theta_2\theta_1 - 3\phi_1\theta_2\theta_1\phi_2^2 + \phi_1\theta_2\theta_1\phi_2^3 + 4\phi_1^2\theta_2\phi_2^2 + \phi_1^4\theta_2\phi_2 - \phi_1^2\theta_1^2\phi_2 + \\
& \theta_1\phi_1^3\phi_2 - \phi_1^2\theta_2^2\phi_2 - \phi_1\theta_1\phi_2^3 + \phi_1^3\theta_2\theta_1 + 3\phi_1\theta_1\phi_2^2 - \phi_1^2\theta_2\phi_2^3 - \phi_1^4\theta_2 + \phi_1^2\theta_1^2 - \theta_1\phi_1^3 + \\
& \theta_1^2\phi_2^3 + \phi_1^2\theta_2^2 - \theta_2\phi_2^4 - \theta_2\theta_1\phi_1^3\phi_2 + \theta_2^2\phi_2^3 - \phi_1^2\phi_2 < 0 \quad (iii)
\end{aligned}$$

ii) $\rho_2 > -c$

$$\begin{aligned}
& \phi_2 - \theta_2 + \phi_1^2 - 2\phi_2^2 + \phi_2^3 + \phi_1\theta_2\theta_1 + c(-1 + \phi_2)(-1 - 2\phi_1\theta_2\theta_1 + 2\phi_1\theta_1 - 2\theta_2\phi_2 + 2\phi_1^2\theta_2 - \\
& 2\theta_2\phi_2^2 + \theta_1^2\phi_2 + \theta_2^2\phi_2 + \phi_2 - \theta_1^2 - \theta_2^2) - \phi_2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2\phi_2 + \theta_2^2\phi_2 - \phi_1\theta_1 + 2\theta_2\phi_2 + 2\theta_2\phi_2^2 + \\
& \phi_2\phi_1\theta_2\theta_1 - 2\theta_2\phi_2^3 - 2\theta_1^2\phi_2^2 - 2\theta_2^2\phi_2^2 + \phi_2\phi_1^2\theta_2 - 3\phi_1\theta_2\theta_1\phi_2^2 + \phi_1\theta_2\theta_1\phi_2^3 + 4\phi_1^2\theta_2\phi_2^2 + \\
& \phi_1^4\theta_2\phi_2 - \phi_1^2\theta_1^2\phi_2 + \theta_1\phi_1^3\phi_2 - \phi_1^2\theta_2^2\phi_2 - \phi_1\theta_1\phi_2^3 + \phi_1^3\theta_2\theta_1 + 3\phi_1\theta_1\phi_2^2 - \phi_1^2\theta_2\phi_2^3 - \phi_1^4\theta_2 + \\
& \phi_1^2\theta_1^2 - \theta_1\phi_1^3 + \theta_1^2\phi_2^3 + \phi_1^2\theta_2^2 - \theta_2\phi_2^4 - \theta_2\theta_1\phi_1^3\phi_2 + \theta_2^2\phi_2^3 - \phi_1^2\phi_2 > 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c + \phi_2 - \theta_2 + \phi_1^2 - 2\phi_2^2 + \phi_2^3 + \phi_1\theta_2\theta_1 - \phi_2\phi_1\theta_1 - 2c\theta_2\phi_2^3 + c\theta_2^2\phi_2^2 + \theta_1^2\phi_2 + \theta_2^2\phi_2 - \phi_1\theta_1 + \\
& 2\theta_2\phi_2 + 2\theta_2\phi_2^2 + \phi_2\phi_1\theta_2\theta_1 + 2c\phi_2\phi_1\theta_1 + 2c\phi_2\phi_1^2\theta_2 - 2c\phi_2\phi_1\theta_2\theta_1 - 2\theta_2\phi_2^3 - 2\theta_1^2\phi_2^2 - 2\theta_2^2\phi_2^2 - \\
& - 2c\phi_2 + c\theta_1^2 + c\theta_2^2 + c\phi_2^2 - 2c\phi_1\theta_1 + \phi_2\phi_1^2\theta_2 + 2c\theta_2\phi_2 - 2c\phi_1^2\theta_2 - 2c\theta_1^2\phi_2 - 2c\theta_2^2\phi_2 + \\
& c\theta_1^2\phi_2^2 + 2c\phi_1\theta_2\theta_1 - 3\phi_1\theta_2\theta_1\phi_2^2 + \phi_1\theta_2\theta_1\phi_2^3 + 4\phi_1^2\theta_2\phi_2^2 + \phi_1^4\theta_2\phi_2 - \phi_1^2\theta_1^2\phi_2 + \theta_1\phi_1^3\phi_2 - \\
& \phi_1^2\theta_2^2\phi_2 - \phi_1\theta_1\phi_2^3 + \phi_1^3\theta_2\theta_1 + 3\phi_1\theta_1\phi_2^2 - \phi_1^2\theta_2\phi_2^3 - \phi_1^4\theta_2 + \phi_1^2\theta_1^2 - \theta_1\phi_1^3 + \theta_1^2\phi_2^3 + \\
& \phi_1^2\theta_2^2 - \theta_2\phi_2^4 - \theta_2\theta_1\phi_1^3\phi_2 + \theta_2^2\phi_2^3 - \phi_1^2\phi_2 > 0 \quad (iv)
\end{aligned}$$

4.2 ESTUDO DE SIMULAÇÃO

A fim de avaliar o desempenho do procedimento *Bootstrap*, comparando-o com o método assintótico, simulou-se séries temporais a partir de modelos ARMA de ordem $p + q > 2$. Foram simuladas séries de tamanho 30, 50 e 100, a partir de modelos

AR(3), MA(3) e ARMA(2,2), com parâmetros na região de “Quase Ruído Branco” e fora dela. Ou seja, escolheu-se modelos com baixos valores da FAC e FACP para avaliar o desempenho do método clássico na identificação deste tipo de estrutura. Para a estrutura AR(3), foram analisados 15 modelos, dos quais, 10 possuem parâmetros correspondentes às regiões do “Quase Ruído Branco”. Os pontos representados na figura (24) correspondem aos modelos simulados. Nos quadros de 1 a 15 no apêndice I, estão os resultados obtidos na simulação de séries com 50 observações geradas com resíduo Normal. Os resultados exibidos nos quadros de 41 a 50 referem-se às simulações com 30 e 100 observações.

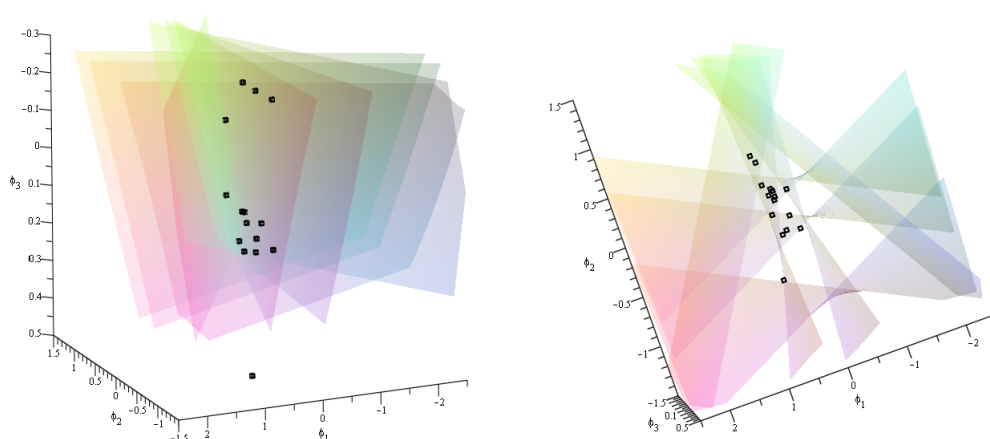


FIGURA 24: Modelos Simulados - AR(3)

Foram analisados 15 modelos da estrutura MA(3), 10 com parâmetros correspondentes às regiões do “Quase Ruído Branco”. Os pontos representados na figura (25) correspondem aos modelos simulados. Nos quadros de 16 a 30 no apêndice I, estão os resultados obtidos na simulação de séries com 50 observações. Nos quadros de 50 a 60 estão os resultados das simulações de $n=30$ e $n=100$.

E por fim, foram analisados 10 modelos da estrutura ARMA(2,2), 5 com parâmetros correspondentes às regiões do “Quase Ruído Branco”, e 5 modelos com parâmetros nas fronteiras dessa região. Nos quadros de 31 a 40 no apêndice I, estão os resultados obtidos na simulação de séries com 50 observações geradas com resíduo Normal.

Como os resultados se repetem em todos os experimentos realizados, por bre-

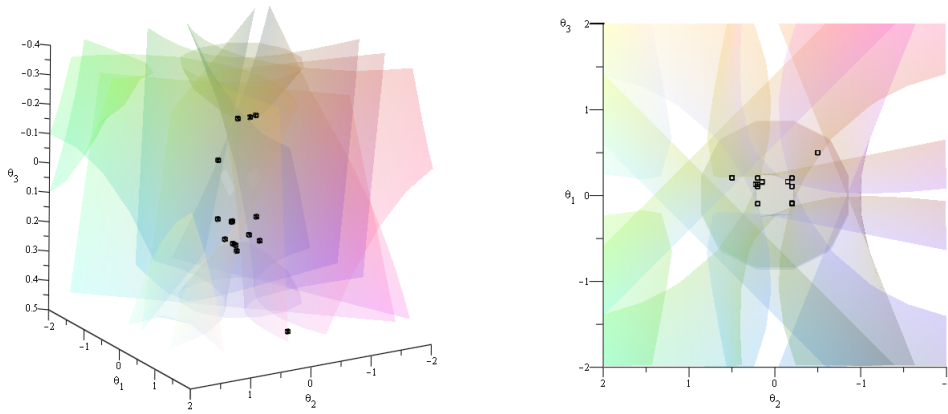


FIGURA 25: Modelos Simulados - MA(3)

vidade relata-se apenas uma pequena parte da simulação, que contudo é suficiente para ilustrar os resultados obtidos. Os demais resultados das simulações encontram-se no apêndice A.

4.2.1 Exemplos

Exemplo 1. Considere os modelos das estruturas AR(3), $\omega_t = 0,7\omega_{t-1} - 0,5\omega_{t-2} + 0,5\omega_{t-3} + a_t$ fora da região de “Quase Ruído Branco” e $\omega_t = 0,1\omega_{t-1} + 0,1\omega_{t-2} + 0,1\omega_{t-3} + a_t$ na região de “Quase Ruído Branco”, com $a_t \sim N(0,0.1)$. Estimamos para cada modelo os desvios-padrão das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostrais. Em 100 repetições Monte Carlo são geradas séries de comprimento $n = 30$, $n = 50$ e $n = 100$ e para cada experimento são obtidos os desvios-padrão exatos(E), assintóticos(A) e *Bootstrap*(B). Os desvios-padrão exatos foram obtidos por 10000 repetições do modelo. As estimativas assintóticas são calculadas por meio das expressões de Bartlett e Quenoulli. O algoritmo *Bootstrap* foi aplicado com $B = 10000$ para cada repetição Monte Carlo. Nas tabelas 2 e 3, estão os valores médios das estimativas dos desvios padrão de ρ_k e ϕ_{kk} para os lags $k = 1, 2, 3$ e 4.

Em ambos os experimentos observa-se que as estimativas *Bootstrap* têm um bom comportamento em comparação com as estimativas assintóticas, sobretudo nas

TABELA 2: Estimativas do desvio padrão das FAC e FACP. Modelo

$$\omega_t = 0.7\omega_{t-1} - 0.5\omega_{t-2} + 0.5\omega_{t-3} + a_t$$

	n = 30			n = 50			n = 100		
	E	A	B	E	A	B	E	A	B
ρ_1	0.164	0.183	0.174	0.137	0.141	0.142	0.103	0.100	0.105
ϕ_{11}	0.164	0.183	0.174	0.137	0.141	0.142	0.097	0.100	0.105
ρ_2	0.173	0.208	0.155	0.148	0.166	0.127	0.107	0.120	0.096
ϕ_{22}	0.164	0.183	0.189	0.132	0.141	0.149	0.089	0.100	0.106
ρ_3	0.183	0.221	0.155	0.159	0.173	0.129	0.123	0.122	0.099
ϕ_{33}	0.158	0.183	0.164	0.125	0.141	0.128	0.095	0.100	0.103
ρ_4	0.174	0.227	0.156	0.146	0.181	0.132	0.109	0.128	0.100
ϕ_{44}	0.154	0.183	0.160	0.129	0.141	0.126	0.096	0.100	0.107

TABELA 3: Estimativas do desvio padrão das FAC e FACP. Modelo

$$\omega_t = 0.1\omega_{t-1} + 0.1\omega_{t-2} + 0.1\omega_{t-3} + a_t$$

	n = 30			n = 50			n = 100		
	E	A	B	E	A	B	E	A	B
ρ_1	0.191	0.182	0.158	0.153	0.141	0.130	0.110	0.100	0.096
ϕ_{11}	0.191	0.182	0.158	0.153	0.141	0.130	0.110	0.100	0.095
ρ_2	0.174	0.189	0.159	0.139	0.146	0.124	0.102	0.102	0.097
ϕ_{22}	0.171	0.182	0.166	0.135	0.141	0.129	0.098	0.100	0.099
ρ_3	0.167	0.194	0.153	0.134	0.149	0.125	0.098	0.104	0.096
ϕ_{33}	0.164	0.182	0.165	0.133	0.141	0.133	0.096	0.100	0.099
ρ_4	0.164	0.199	0.155	0.136	0.152	0.125	0.100	0.106	0.096
ϕ_{44}	0.162	0.182	0.173	0.132	0.141	0.136	0.097	0.100	0.101

amostras de tamanhos $n = 30$ e $n = 50$. Nestes casos, na medida que o *lag* k aumenta, as estimativas assintóticas tornam-se mais enviesadas do que as estimativas *Bootstrap*.

Também foram testadas as hipóteses estabelecidas em (12) para cada repetição Monte Carlo, e assim pode-se avaliar a probabilidade de cobertura do parâmetro nulo pelos intervalos assintóticos (13) e (14). Os intervalos de confiança *Bootstrap* percentílico e percentílico corrigido, foram construídos a fim de testar o poder empírico das hipóteses nulas equivalentes:

$$H_{o1} : [\hat{\rho}_{k_{lo}}^* ; \hat{\rho}_{k_{up}}^*] \supset 0 \quad e \quad H_{o2} : [\hat{\phi}_{kk_{lo}}^* ; \hat{\phi}_{kk_{up}}^*] \supset 0.$$

Isto é, testa-se a hipótese do zero estar contido nos intervalos. Já nos intervalos clássicos a pergunta é se a estimativa pertence ao intervalo para o parâmetro nulo.

As hipóteses foram testadas para os 4 primeiros *lags* das FAC e FACP de cada uma das estruturas referenciadas. O intervalo percentílico *Bootstrap* é do tipo assimétrico com 1% no ramo próximo do zero e 9% na outra extremidade. O nível de confiança de todos os intervalos é de 90%.

Como as séries são simuladas a partir de modelos AR(3), espera-se que $\hat{\phi}_{44}$ seja estatisticamente nulo. Ou seja, $\hat{\phi}_{44}$ pertença aos intervalos clássicos (13) e (14), ou ainda, o zero esteja contido nos intervalos (40) e (46) construídos para este parâmetro.

As tabelas (4) e (5) mostram a probabilidade de cobertura do zero pelos intervalos de confiança assintótico (A), *Bootstrap* percentílico (B) e *Bootstrap* corrigido (BC), para os modelos considerados.

TABELA 4: Probabilidade de cobertura do zero. Modelo $\omega_t = 0,7\omega_{t-1} + 0,5\omega_{t-2} + 0,5\omega_{t-3} + a_t$

	n = 30			n = 50			n = 100		
	A	B	BC	A	B	BC	A	B	BC
ρ_1	0.35	0.37	0.35	0.16	0.25	0.15	0.00	0.00	0.00
ϕ_{11}	0.35	0.37	0.35	0.16	0.25	0.15	0.00	0.00	0.00
ρ_2	0.77	0.46	0.44	0.63	0.50	0.48	0.76	0.69	0.60
ϕ_{22}	0.53	0.41	0.39	0.35	0.25	0.32	0.19	0.25	0.36
ρ_3	0.81	0.64	0.61	0.76	0.66	0.56	0.30	0.38	0.18
ϕ_{33}	0.45	0.51	0.29	0.14	0.43	0.21	0.00	0.12	0.02
ρ_4	0.81	0.46	0.40	0.48	0.36	0.24	0.05	0.05	0.03
ϕ_{44}	0.96	0.91	0.93	0.91	0.96	1.00	0.89	0.99	0.98

TABELA 5: Probabilidade de cobertura do zero. Modelo $\omega_t = 0,1\omega_{t-1} + 0,1\omega_{t-2} + 0,1\omega_{t-3} + a_t$

	n = 30			n = 50			n = 100		
	A	B	BC	A	B	BC	A	B	BC
ρ_1	0.87	0.78	0.72	0.78	0.76	0.62	0.71	0.80	0.67
ϕ_{11}	0.87	0.78	0.72	0.78	0.76	0.62	0.71	0.80	0.67
ρ_2	0.95	0.76	0.68	0.88	0.82	0.71	0.74	0.85	0.67
ϕ_{22}	0.93	0.79	0.74	0.93	0.85	0.78	0.78	0.88	0.73
ρ_3	0.95	0.82	0.77	0.88	0.85	0.77	0.75	0.78	0.70
ϕ_{33}	0.93	0.80	0.77	0.92	0.88	0.82	0.81	0.85	0.77
ρ_4	0.98	0.82	0.79	0.96	0.80	0.78	0.93	0.89	0.86
ϕ_{44}	0.93	0.82	0.80	0.92	0.79	0.80	0.81	0.84	0.85

Os resultados exibidos na tabela 4 apontam que nas amostras de tamanho $n=30$ e $n=50$ os intervalos *Bootstrap*, em especial o BC, possuem maior poder empírico para rejeitar a hipótese nula, ou seja, estimam melhor parâmetros que não são nulos. Já

no caso de ϕ_{44} , os intervalos *Bootstrap* possuem maior probabilidade de cobertura do zero, ou seja, é mais acurado do que o intervalo assintótico na identificação do parâmetro nulo.

Um problema maior está na identificação da ordem do modelo, a partir das séries simuladas de $\omega_t = 0,1\omega_{t-1} + 0,1\omega_{t-2} + 0,1\omega_{t-3} + a_t$ (tabela 5). Para esta estrutura AR(3), o conjunto de valores dos *lags* da FAC e FACP está contido nos intervalos de confiança assintótico de nível 90% (13) e (14) respectivamente. Observa-se no experimento de simulação que a probabilidade de cobertura do parâmetro nulo é muito alta, inclusive nas amostras de $n = 100$ onde o desempenho do método assintótico é melhor. Assim, a técnica clássica aponta o processo como ruído branco, ao invés de identificar um modelo com baixos valores para FAC e FACP. Nestes casos o desempenho do *Bootstrap* também superior, em especial nas amostras de tamanho $n = 30$ e $n = 50$, pois a probabilidade de cobertura do zero é menor em ambos intervalos analisados.

Exemplo 2. Considere a estimação dos percentis da distribuição da função de autocorrelação amostral. Nas figuras 26 e 27, a linha sólida representa os percentis 5% e 95% da distribuição exata de $\hat{\rho}_k$ para $k = 1, 2, \dots, 6$, que são obtidos usando 10000 repetições dos modelos $\omega_t = 0,1\omega_{t-1} + 0,1\omega_{t-2} + 0,1\omega_{t-3} + a_t$ (modelo 1) e $\omega_t = 0,7\omega_{t-1} + 0,5\omega_{t-2} + 0,5\omega_{t-3} + a_t$ (modelo 2). Os valores médios correspondentes aos percentis análogos da distribuição de $\hat{\rho}_k^*$ ao longo de 200 repetições são representados pela linha pontilhada. Para aplicar o *Bootstrap* foi usado $B = 10000$ para cada repetição Monte Carlo. Por fim, os valores médios correspondentes aos percentis da distribuição normal assintótica estão representados pela linha hachurada. As variâncias assintóticas são calculadas em cada uma das 10000 repetições do modelo, por meio da fórmula de Bartlett. Em ambos os experimentos as séries são de tamanho $n = 50$.

Observa-se que as estimativas *Bootstrap* refletem mais satisfatoriamente a distri-

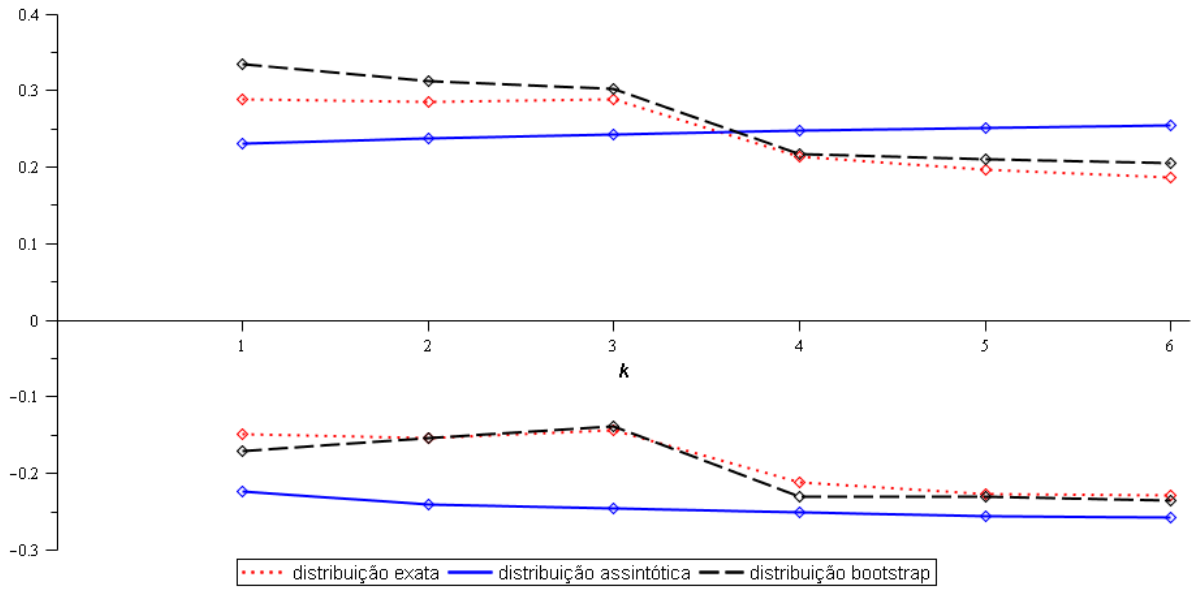


FIGURA 26: Percentis 5% e 95% das distribuições Exata, *Bootstrap* e Assintótica de ρ_k - modelo 1

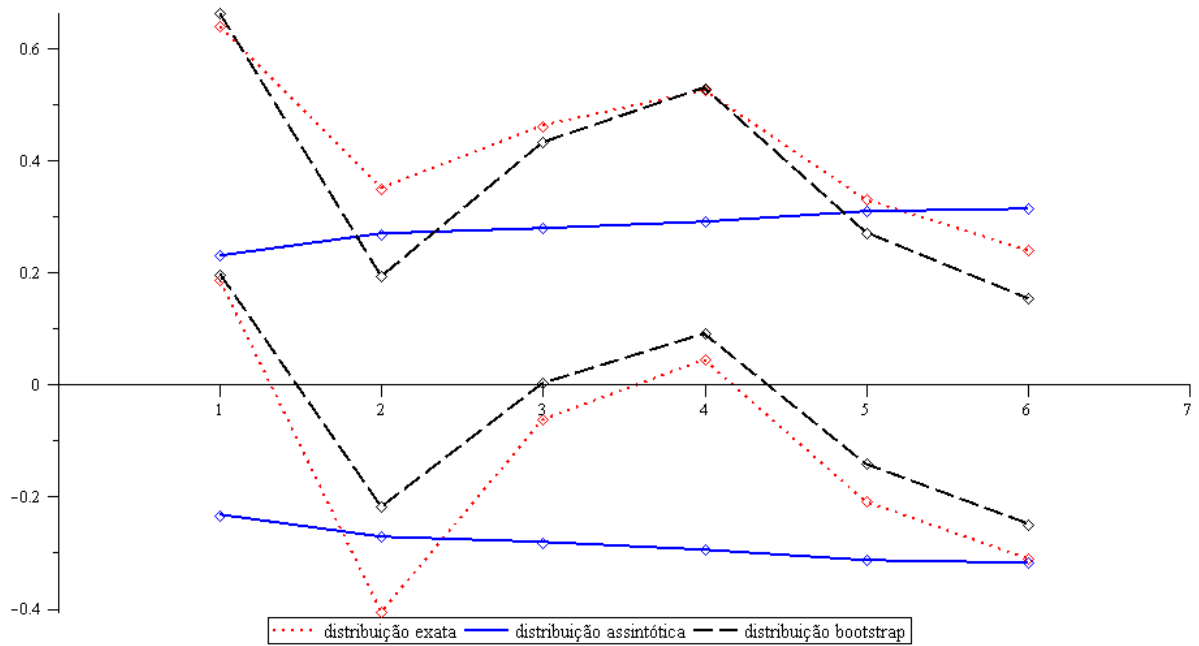


FIGURA 27: Percentis 5% e 95% das distribuições Exata, *Bootstrap* e Assintótica de ρ_k - modelo 2

buição amostral da função de autocorrelação parcial do que o método assintótico. Em particular nos casos onde a distribuição não é simétrica o *Bootstrap* fornece estimativas mais acuradas.

Exemplo 3. Considere os modelos das estruturas MA(3), $\omega_t = -0,15a_{t-1} - 0,15a_{t-2} + 0,225a_{t-3} + a_t$ fora da região de “Quase Ruído Branco” e $\omega_t = -0,2a_{t-1} - 0,5a_{t-2} + 0,1a_{t-3} + a_t$ na região de “Quase Ruído Branco”, com $a_t \sim N(0,0.1)$. Estimamos para cada modelo os desvios-padrão das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostrais sob as mesmas condições apresentadas no exemplo 1. Nas tabelas 6 e 7 estão os valores médios das estimativas dos desvios padrão, exato(E), assintótico(A) e *Bootstrap*(B), de ρ_k e ϕ_{kk} para os lags $k = 1, 2, 3$ e 4.

TABELA 6: Estimativas do desvio padrão das FAC e FACP. Modelo
 $\omega_t = -0,15a_{t-1} - 0,15a_{t-2} + 0,225a_{t-3} + a_t$

	n = 30			n = 50			n = 100		
	E	A	B	E	A	B	E	A	B
ρ_1	0.143	0.182	0.170	0.121	0.141	0.136	0.083	0.100	0.097
ϕ_{11}	0.143	0.182	0.170	0.121	0.141	0.136	0.083	0.100	0.097
ρ_2	0.154	0.190	0.164	0.133	0.146	0.133	0.096	0.103	0.098
ϕ_{22}	0.152	0.182	0.172	0.137	0.141	0.138	0.100	0.100	0.101
ρ_3	0.161	0.199	0.161	0.118	0.152	0.128	0.090	0.106	0.099
ϕ_{33}	0.156	0.182	0.177	0.118	0.141	0.143	0.083	0.100	0.108
ρ_4	0.164	0.207	0.158	0.127	0.127	0.127	0.092	0.109	0.097
ϕ_{44}	0.149	0.182	0.168	0.128	0.128	0.125	0.088	0.100	0.108

TABELA 7: Estimativas do desvio padrão das FAC e FACP. Modelo
 $\omega_t = -0,2a_{t-1} - 0,5a_{t-2} + 0,1a_{t-3} + a_t$

	n = 30			n = 50			n = 100		
	E	A	B	E	A	B	E	A	B
ρ_1	0.129	0.182	0.168	0.094	0.141	0.138	0.072	0.100	0.098
ϕ_{11}	0.129	0.182	0.168	0.094	0.141	0.138	0.072	0.100	0.098
ρ_2	0.139	0.187	0.172	0.122	0.144	0.138	0.072	0.101	0.101
ϕ_{22}	0.139	0.182	0.178	0.114	0.141	0.141	0.069	0.100	0.103
ρ_3	0.193	0.210	0.157	0.144	0.163	0.126	0.118	0.116	0.096
ϕ_{33}	0.149	0.182	0.179	0.115	0.141	0.138	0.091	0.100	0.102
ρ_4	0.186	0.216	0.156	0.158	0.166	0.127	0.107	0.117	0.094
ϕ_{44}	0.159	0.182	0.180	0.129	0.141	0.133	0.093	0.100	0.103

Da mesma forma do que o apresentado para os modelos da estrutura AR(3), observa-se que as estimativas *Bootstrap* têm uma variabilidade menor comparado com as estimativas assintóticas, sobretudo nas amostras de tamanhos $n = 30$ e $n = 50$. Nestes casos, na medida que o lag k aumenta, as estimativas assintóticas tornam-se

mais enviesadas do que as estimativas *Bootstrap*.

A probabilidade de cobertura dos intervalos assintóticos e *Bootstrap* também foram avaliadas. Como as séries são simuladas a partir de modelos MA(3), espera-se que $\hat{\rho}_4$ seja estatisticamente nulo. Ou seja, $\hat{\rho}_4$ pertença aos intervalos clássicos (13) e (14), ou ainda, o zero esteja contido nos intervalos (40) e (46) construídos para este parâmetro. Nas tabelas (8) e (9) estão a probabilidade de cobertura do zero pelos intervalos referenciados.

TABELA 8: Probabilidade de cobertura do zero. Modelo
 $\omega_t = -0,15a_{t-1} - 0,15a_{t-2} + 0,225a_{t-3} + a_t$

	n = 30			n = 50			n = 100		
	C	B	BC	C	B	BC	C	B	BC
ρ_1	0.85	0.67	0.73	0.76	0.59	0.67	0.50	0.39	0.50
ϕ_{11}	0.85	0.67	0.73	0.76	0.59	0.67	0.50	0.39	0.50
ρ_2	0.81	0.59	0.68	0.70	0.58	0.60	0.61	0.45	0.53
ϕ_{22}	0.66	0.46	0.56	0.58	0.46	0.55	0.47	0.35	0.42
ρ_3	0.87	0.84	0.75	0.78	0.84	0.61	0.49	0.66	0.43
ϕ_{33}	0.90	0.95	0.87	0.88	0.95	0.81	0.68	0.94	0.70
ρ_4	0.95	0.82	0.84	0.98	0.88	0.89	0.96	0.90	0.93
ϕ_{44}	0.94	0.90	0.92	0.94	0.88	0.93	0.93	0.97	0.94

TABELA 9: Probabilidade de cobertura do zero. Modelo $\omega_t = -0,2a_{t-1} - 0,5a_{t-2} + 0,1a_{t-3} + a_t$

	n = 30			n = 50			n = 100		
	C	B	BC	C	B	BC	C	B	BC
ρ_1	0.91	0.83	0.88	0.89	0.73	0.86	0.76	0.61	0.75
ϕ_{11}	0.91	0.83	0.88	0.89	0.73	0.86	0.76	0.61	0.75
ρ_2	0.36	0.14	0.22	0.19	0.05	0.12	0.00	0.00	0.00
ϕ_{22}	0.19	0.10	0.16	0.08	0.02	0.05	0.00	0.00	0.00
ρ_3	0.89	0.83	0.79	0.94	0.82	0.78	0.83	0.84	0.74
ϕ_{33}	0.94	0.88	0.94	0.94	0.83	0.88	0.89	0.86	0.92
ρ_4	0.95	0.80	0.79	0.92	0.82	0.79	0.92	0.87	0.83
ϕ_{44}	0.76	0.68	0.80	0.65	0.54	0.67	0.43	0.40	0.49

Da mesma forma que no exemplo anterior, os resultados exibidos na tabela 8 apontam que nas amostras de tamanho $n=30$ e $n=50$ os intervalos *Bootstrap*, possuem maior poder empírico para rejeitar a hipótese nula. Porém, o intervalo BC não apresenta menor probabilidade de cobertura do parâmetro nulo. Nas amostras de tamanho $n=100$, o desempenho do *Bootstrap* é equivalente ao método assintótico.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram identificadas as regiões de “Quase Ruído Branco” das estruturas AR(3), MA(3), ARMA(2,1) e ARMA(2,2). Um algoritmo *Bootstrap moving blocks*, foi utilizado na identificação da ordem de modelos ARMA. O algoritmo foi testado em séries temporais simuladas a partir de modelos das estruturas AR(3), MA(3) e ARMA(2,2), com parâmetros na região de “Quase Ruído Branco” e fora dela. Desta forma, foram determinadas as distribuições amostrais das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, empregadas classicamente na identificação deste tipo de estrutura, livres da suposição de Gaussianidade. Os exemplos mostraram que *Bootstrap* tem um bom desempenho em amostras de todos os tamanhos, sendo superior ao método assintótico em amostras pequenas. Em geral estimativas *Bootstrap* são mais acuradas, ou seja, possuem uma variabilidade menor do que as estimativas assintóticas, sobretudo nas amostras de tamanho $n=30$ e $n=50$.

Com relação à estrutura AR(3), observou-se um desempenho superior do método *Bootstrap* em relação ao clássico, sobretudo nas amostras de tamanho $n = 30$ e $n=50$. Os intervalos de confiança *Bootstrap* apresentaram menor probabilidade de cobertura do zero, ou seja possuem um maior poder para rejeitar a hipótese nula. O intervalo percentílico BC, nos experimentos correspondentes à região do “Quase Ruído Branco”, mostrou um desempenho superior ao intervalo percentílico. As estimativas do erro padrão *Bootstrap* são inferiores às clássicas em todos os experimentos, exceto as estimativas dos erros padrão da autocorrelação parcial de lags 2 e 3 que são maiores em alguns casos, principalmente nos modelos com parâmetros fora da região do “Quase Ruído Branco”. Este resultado está possivelmente relacionado com o estimador *Bootstrap* da função de autocorrelação parcial de lag k , dado pelas equações de Yulle-Walker, que é obtido em função das autocorrelações estimadas. No caso clás-

sico, a FACP possui um valor fixo de $1/\sqrt{n}$, assim não depende de valores estimados a partir da amostra.

Os resultados obtidos para a estrutura MA(3), foram semelhantes aos obtidos para a estrutura AR(3). Os intervalos de confiança *Bootstrap* apresentaram menor probabilidade de cobertura do zero, ou seja possuem um maior poder para rejeitar a hipótese nula. Porém em muitos modelos, o intervalo percentílico BC, obteve resultado igual ou inferior ao intervalo percentílico. Esse resultado pode estar relacionado com a distribuição das FAC e FACP dos modelos escolhidos. As estimativas do erro padrão *Bootstrap* são inferiores às clássicas e mais próximas do valor verdadeiro. A diferença entre os desvios padrão, clássicos e *Bootstrap*, é mais acentuada nas amostras de $n=30$ e $n=50$. Nas amostras de tamanho $n=100$ os resultados são equivalentes.

Para a estrutura ARMA(2,2) observou-se, da mesma forma que nos modelos anteriores, um desempenho superior do método *Bootstrap* em relação ao clássico. Os intervalos de confiança *Bootstrap* apresentaram menor probabilidade de cobertura do zero, sobretudo aqueles com parâmetros na região do “Quase Ruído Branco”. Os intervalos *Bootstrap* BC e percentílico apresentaram resultados equivalentes. As estimativas do erro padrão *Bootstrap* são em geral inferiores às clássicas, porém a diferença não é tão grande em relação aos outros modelos analisados. Existe uma tendência do *Bootstrap* super-estimar os desvios padrão da FACP de lags 2 e 3, de modelos com parâmetros nas fronteiras da região de estacionaridade e invertibilidade.

Na identificação de modelos com parâmetros na região de “Quase Ruído Branco”, o método clássico é ineficaz em amostras de todos os tamanhos, apontado o processo como ruído branco. O *Bootstrap* pode ser uma alternativa para este tipo de estrutura, pois os intervalos de confiança possuem uma probabilidade menor de cobertura do parâmetro nulo, ou seja, possuem maior poder para rejeitar as hipóteses nulas. Estes resultados se repetiram nas séries simuladas a partir de todos os modelos estudados, e pode ser justificado pela distribuição *Bootstrap* da FAC e FACP. A comparação com os percentis da distribuição exata, *Bootstrap* e assintótica, evidencia que *Bootstrap*

reproduz de forma mais satisfatória a verdadeira distribuição das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial.

APÊNDICE A – RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

Quadro 1 – Modelo AR(3)		$\phi_1 = 0,1$		$\phi_2 = 0,1$		$\phi_3 = 0,1$		n=50
lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$		
1	0,125	0,087	0,087	0,125	0,087	0,087		
2	0,125	0,077	0,077	0,111	0,049	0,049		
3	0,125	0,078	0,079	0,100	0,062	0,062		
4	0,037	-0,019	-0,018	0,000	-0,051	-0,050		
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$		
1	0,148	0,141	0,136	0,148	0,141	0,136		
2	0,121	0,145	0,131	0,116	0,141	0,135		
3	0,151	0,148	0,132	0,151	0,141	0,139		
4	0,140	0,151	0,129	0,134	0,141	0,139		
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo								
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC			
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}		
1	0,790	0,790	0,870	0,870	0,730	0,730		
2	0,930	0,960	0,940	0,960	0,850	0,940		
3	0,840	0,840	0,850	0,880	0,760	0,780		
4	0,910	0,840	0,850	0,830	0,830	0,850		
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo			
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}		
1	0,465	0,465	0,498	0,498	0,449	0,449		
2	0,478	0,465	0,481	0,496	0,432	0,446		
3	0,487	0,465	0,483	0,507	0,436	0,458		
4	0,499	0,465	0,477	0,515	0,426	0,460		

Quadro 2 – Modelo AR(3)		$\Phi_1 = 0,2$		$\Phi_2 = 0,2$		$\Phi_3 = 0,2$		n=50
lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$		
1	0,333	0,246	0,249	0,333	0,246	0,249		
2	0,333	0,238	0,236	0,250	0,169	0,165		
3	0,333	0,244	0,246	0,200	0,160	0,163		
4	0,200	0,100	0,098	0,000	-0,043	-0,047		
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$		
1	0,159	0,141	0,129	0,159	0,141	0,129		
2	0,157	0,152	0,134	0,138	0,141	0,148		
3	0,148	0,162	0,127	0,139	0,141	0,148		
4	0,163	0,171	0,124	0,143	0,141	0,155		
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo								
Clássico			Percentílico Assimétrico		Percentílico BC			
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}		
1	0,440	0,440	0,430	0,430	0,320	0,320		
2	0,570	0,680	0,520	0,720	0,430	0,640		
3	0,540	0,700	0,430	0,740	0,350	0,640		
4	0,830	0,700	0,740	0,830	0,670	0,830		
Amplitude Intervalo			Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo			
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}		
1	0,465	0,465	0,414	0,414	0,413	0,413		
2	0,502	0,465	0,438	0,485	0,437	0,477		
3	0,534	0,465	0,407	0,473	0,414	0,473		
4	0,565	0,465	0,410	0,508	0,398	0,483		

Quadro 3 – Modelo AR(3)			$\Phi_1 = 0,2$	$\Phi_2 = 0,5$	$\Phi_3 = 0,1$	n=50
lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,531	0,315	0,315	0,531	0,315	0,315
2	0,659	0,478	0,478	0,525	0,380	0,379
3	0,497	0,251	0,252	0,100	0,027	0,029
4	0,482	0,230	0,231	0,000	-0,045	-0,044
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,248	0,141	0,133	0,248	0,141	0,133
2	0,144	0,161	0,136	0,119	0,141	0,169
3	0,185	0,188	0,130	0,126	0,141	0,194
4	0,182	0,197	0,130	0,142	0,141	0,313
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,370	0,370	0,440	0,440	0,340	0,340
2	0,050	0,130	0,120	0,440	0,040	0,160
3	0,610	0,930	0,560	0,930	0,400	0,930
4	0,700	0,930	0,610	0,890	0,440	0,930
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,478	0,478	0,439	0,439
2	0,531	0,465	0,483	0,602	0,448	0,559
3	0,621	0,465	0,465	0,696	0,431	0,645
4	0,650	0,465	0,472	1,151	0,432	1,034

Quadro 4 – Modelo AR(3)			$\Phi_1 = 0,2$	$\Phi_2 = -0,2$	$\Phi_3 = 0,2$	n=50
lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,142	0,126	0,126	0,142	0,126	0,126
2	-0,142	-0,141	-0,141	-0,166	-0,176	-0,176
3	0,142	0,091	0,091	0,200	0,134	0,133
4	0,085	0,024	0,025	0,000	-0,062	-0,062
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,122	0,141	0,134	0,122	0,141	0,134
2	0,150	0,145	0,133	0,136	0,141	0,138
3	0,138	0,151	0,132	0,142	0,141	0,144
4	0,143	0,154	0,133	0,142	0,141	0,152
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,800	0,800	0,910	0,910	0,720	0,720
2	0,780	0,700	0,570	0,530	0,650	0,620
3	0,870	0,720	0,910	0,870	0,760	0,710
4	0,920	0,720	0,870	0,820	0,830	0,860
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,488	0,488	0,445	0,445
2	0,479	0,465	0,501	0,518	0,441	0,456
3	0,497	0,465	0,483	0,527	0,435	0,477
4	0,509	0,465	0,488	0,557	0,442	0,504

Quadro 5 – Modelo AR(3)			$\Phi_1 = 0,5$	$\Phi_2 = -0,5$	$\Phi_3 = 0,5$	n=50
lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,250	0,212	0,217	0,250	0,221	0,217
2	-0,250	-0,260	-0,261	-0,333	-0,345	-0,346
3	0,250	0,207	0,207	0,500	0,396	0,396
4	0,375	0,285	0,282	0,000	-0,038	-0,062
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,139	0,141	0,132	0,139	0,141	0,132
2	0,209	0,150	0,130	0,150	0,141	0,140
3	0,139	0,164	0,127	0,125	0,141	0,162
4	0,145	0,171	0,129	0,132	0,141	0,209
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,580	0,580	0,600	0,600	0,470	0,470
2	0,490	0,230	0,320	0,170	0,380	0,210
3	0,620	0,110	0,640	0,330	0,450	0,130
4	0,510	0,920	0,410	0,860	0,320	0,830
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,437	0,437	0,428	0,428
2	0,495	0,465	0,443	0,476	0,428	0,447
3	0,541	0,465	0,424	0,540	0,406	0,482
4	0,565	0,465	0,426	0,690	0,428	0,584

Quadro 6 – Modelo AR(3)		$\Phi_1 = 0,15$		$\Phi_2 = 0,15$	$\Phi_3 = 0,225$	n=50
lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,240	0,170	0,172	0,240	0,170	0,172
2	0,240	0,150	0,150	0,193	0,104	0,103
3	0,297	0,224	0,223	0,225	0,183	0,181
4	0,134	0,054	0,053	0,000	-0,035	-0,036
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,159	0,141	0,129	0,159	0,141	0,129
2	0,140	0,148	0,132	0,125	0,141	0,140
3	0,139	0,154	0,135	0,130	0,141	0,147
4	0,147	0,162	0,130	0,121	0,141	-0,151
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,620	0,620	0,710	0,710	0,580	0,580
2	0,740	0,800	0,850	0,970	0,630	0,800
3	0,580	0,640	0,700	0,860	0,480	0,650
4	0,930	0,920	0,860	0,880	0,810	0,880
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,470	0,470	0,429	0,429
2	0,489	0,465	0,480	0,509	0,435	0,463
3	0,506	0,465	0,483	0,528	0,440	0,485
4	0,534	0,465	0,477	0,549	0,428	0,492

Quadro 7 – Modelo AR(3)		$\Phi_1 = 0,15$		$\Phi_2 = 0,15$	$\Phi_3 = -0,225$	n=50
lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,139	0,104	0,103	0,139	0,104	0,103
2	0,139	0,101	0,101	0,122	0,066	0,064
3	-0,183	-0,187	-0,187	-0,225	-0,196	-0,194
4	-0,037	-0,046	-0,045	0,000	-0,028	-0,027
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,155	0,141	0,128	0,155	0,141	0,128
2	0,125	0,146	0,125	0,144	0,141	0,130
3	0,145	0,149	0,132	0,148	0,141	0,141
4	0,139	0,156	0,127	0,136	0,141	0,145
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,780	0,780	0,700	0,700	0,650	0,650
2	0,850	0,850	0,800	0,810	0,690	0,730
3	0,620	0,570	0,430	0,410	0,500	0,500
4	0,930	0,910	0,750	0,810	0,750	0,810
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,413	0,413	0,423	0,423
2	0,480	0,465	0,412	0,429	0,414	0,426
3	0,492	0,465	0,449	0,479	0,425	0,453
4	0,516	0,465	0,419	0,479	0,408	0,458

Quadro 8 – Modelo AR(3)			$\Phi_1 = 0,15$	$\Phi_2 = -0,15$	$\Phi_3 = -0,225$	n=50
lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,162	0,145	0,147	0,162	0,145	0,147
2	-0,162	-0,172	-0,170	-0,193	-0,216	-0,217
3	-0,273	-0,269	-0,268	-0,225	-0,213	-0,209
4	-0,053	-0,073	-0,073	0,000	-0,058	-0,060
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,117	0,141	0,136	0,117	0,141	0,136
2	0,132	0,146	0,133	0,148	0,141	0,139
3	0,134	0,152	0,134	0,127	0,141	0,153
4	0,131	0,163	0,125	0,118	0,141	0,152
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,780	0,780	0,800	0,800	0,660	0,660
2	0,700	0,540	0,460	0,360	0,610	0,490
3	0,460	0,570	0,180	0,410	0,310	0,540
4	0,930	0,940	0,740	0,820	0,730	0,860
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,450	0,450	0,439	0,439
2	0,480	0,465	0,440	0,458	0,431	0,435
3	0,501	0,465	0,443	0,505	0,438	0,491
4	0,537	0,465	0,410	0,499	0,397	0,473

Quadro 9 – Modelo AR(3) $\Phi_1 = 0,125$ $\Phi_2 = 0,225$ $\Phi_3 = 0,125$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,205	0,119	0,123	0,205	0,119	0,123
2	0,276	0,211	0,210	0,244	0,169	0,165
3	0,205	0,128	0,130	0,125	0,086	0,086
4	0,113	0,043	0,043	0,000	-0,049	-0,052
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,196	0,141	0,128	0,196	0,141	0,128
2	0,156	0,148	0,127	0,146	0,141	0,136
3	0,146	0,157	0,130	0,122	0,141	0,146
4	0,141	0,161	0,123	0,118	0,141	0,145
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC		
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,700	0,700	0,630	0,630	0,590	0,590
2	0,490	0,600	0,510	0,660	0,420	0,540
3	0,880	0,910	0,740	0,860	0,640	0,800
4	0,940	0,950	0,830	0,800	0,820	0,850
Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,424	0,424	0,417	0,417
2	0,488	0,465	0,416	0,444	0,409	0,434
3	0,516	0,465	0,421	0,474	0,413	0,459
4	0,531	0,465	0,406	0,483	0,398	0,467

Quadro 10 – Modelo AR(3) $\Phi_1 = -0,1$ $\Phi_2 = 0,2$ $\Phi_3 = 0,2$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,076	-0,120	-0,122	-0,076	-0,120	-0,122
2	0,192	0,159	0,157	0,187	0,119	0,116
3	0,165	0,098	0,093	0,200	0,128	0,122
4	0,006	-0,045	-0,048	0,000	-0,060	-0,062
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,166	0,141	0,127	0,166	0,141	0,127
2	0,129	0,147	0,132	0,141	0,141	0,139
3	0,142	0,152	0,130	0,141	0,141	0,141
4	0,130	0,156	0,123	0,120	0,141	0,140
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,720	0,720	0,550	0,550	0,640	0,640
2	0,700	0,770	0,780	0,820	0,640	0,680
3	0,830	0,770	0,810	0,830	0,760	0,730
4	0,940	0,930	0,790	0,840	0,850	0,900
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,417	0,417	0,410	0,410
2	0,483	0,465	0,420	0,409	0,442	0,454
3	0,502	0,465	0,422	0,458	0,428	0,466
4	0,514	0,465	0,407	0,460	0,396	0,441

Quadro 11 – Modelo AR(3) $\Phi_1 = -0,1$ $\Phi_2 = -0,2$ $\Phi_3 = 0,2$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,118	-0,135	-0,136	-0,118	-0,135	-0,136
2	-0,211	-0,227	-0,225	-0,229	-0,269	-0,269
3	0,244	0,225	0,225	0,200	0,157	0,152
4	-0,005	-0,032	-0,033	0,000	-0,053	-0,057
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,116	0,141	0,131	0,116	0,141	0,131
2	0,113	0,145	0,134	0,122	0,141	0,138
3	0,120	0,154	0,129	0,116	0,141	0,148
4	0,127	0,162	0,125	0,116	0,141	0,150
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,780	0,780	0,540	0,540	0,640	0,640
2	0,500	0,330	0,340	0,280	0,430	0,350
3	0,560	0,710	0,570	0,790	0,370	0,690
4	0,980	0,940	0,810	0,840	0,780	0,880
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,443	0,443	0,427	0,427
2	0,479	0,465	0,453	0,469	0,437	0,448
3	0,507	0,465	0,423	0,486	0,411	0,473
4	0,533	0,465	0,419	0,504	0,407	0,482

Quadro 12 – Modelo AR(3)		$\Phi_1 = -0,1$		$\Phi_2 = -0,2$		$\Phi_3 = -0,2$		n=50
lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$		
1	-0,052	-0,058	-0,052	-0,052	-0,058	-0,052		
2	-0,184	-0,167	-0,165	-0,187	-0,190	-0,186		
3	-0,171	-0,142	-0,149	-0,200	-0,160	-0,164		
4	0,064	0,022	0,023	0,000	-0,056	-0,053		
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$		
1	0,128	0,141	0,129	0,128	0,141	0,129		
2	0,130	0,144	0,129	0,122	0,141	0,132		
3	0,133	0,150	0,131	0,133	0,141	0,140		
4	0,107	0,154	0,128	0,105	0,141	0,145		
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo								
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC			
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}		
1	0,890	0,890	0,830	0,830	0,780	0,780		
2	0,690	0,650	0,540	0,470	0,590	0,540		
3	0,770	0,710	0,580	0,570	0,670	0,650		
4	0,990	0,960	0,900	0,820	0,910	0,860		
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo			
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}		
1	0,465	0,465	0,442	0,442	0,424	0,424		
2	0,474	0,465	0,435	0,444	0,427	0,436		
3	0,494	0,465	0,437	0,469	0,422	0,459		
4	0,509	0,465	0,423	0,479	0,417	0,466		

Quadro 13 – Modelo AR(3) $\Phi_1 = 0,1$ $\Phi_2 = 0,2$ $\Phi_3 = 0,125$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,161	0,114	0,115	0,161	0,114	0,115
2	0,236	0,184	0,187	0,215	0,146	0,147
3	0,181	0,096	0,095	0,125	0,058	0,055
4	0,085	0,092	0,011	0,000	-0,061	-0,061
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,179	0,141	0,128	0,179	0,141	0,128
2	0,137	0,147	0,129	0,131	0,141	0,135
3	0,139	0,154	0,124	0,138	0,141	0,136
4	0,142	0,157	0,124	0,138	0,141	0,140
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,690	0,690	0,700	0,700	0,560	0,560
2	0,670	0,780	0,620	0,750	0,440	0,580
3	0,890	0,890	0,800	0,860	0,680	0,800
4	0,930	0,880	0,810	0,760	0,770	0,770
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,418	0,418	0,407	0,407
2	0,485	0,465	0,416	0,437	0,405	0,427
3	0,507	0,465	0,404	0,445	0,411	0,442
4	0,519	0,465	0,406	0,458	0,390	0,437

Quadro 14 – Modelo AR(3) $\Phi_1 = 0,1$ $\Phi_2 = -0,2$ $\Phi_3 = 0,125$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,064	0,057	0,058	0,064	0,057	0,058
2	-0,185	-0,183	-0,183	-0,190	-0,197	-0,197
3	0,093	0,057	0,057	0,125	0,075	0,075
4	0,054	0,018	0,018	0,000	-0,052	-0,052
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,095	0,141	0,137	0,095	0,141	0,137
2	0,150	0,143	0,135	0,146	0,141	0,137
3	0,145	0,150	0,129	0,142	0,141	0,140
4	0,143	0,153	0,128	0,135	0,141	0,142
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,970	0,970	0,990	0,990	0,940	0,940
2	0,630	0,570	0,470	0,450	0,540	0,510
3	0,870	0,850	0,900	0,920	0,790	0,820
4	0,950	0,920	0,890	0,850	0,810	0,880
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,504	0,504	0,451	0,451
2	0,470	0,465	0,505	0,512	0,449	0,455
3	0,495	0,465	0,476	0,515	0,427	0,463
4	0,505	0,465	0,476	0,529	0,422	0,469

Quadro 15 – Modelo AR(3)		$\Phi_1 = 0,125$		$\Phi_2 = 0,2$	$\Phi_3 = 0,2$	n=50
lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,224	0,150	0,150	0,224	0,150	0,150
2	0,272	0,184	0,184	0,234	0,146	0,146
3	0,279	0,181	0,180	0,200	0,131	0,131
4	0,134	0,032	0,032	0,000	-0,051	-0,052
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,153	0,141	0,133	0,153	0,141	0,133
2	0,146	0,147	0,137	0,136	0,141	0,144
3	0,137	0,154	0,134	0,139	0,141	0,147
4	0,149	0,160	0,130	0,128	0,141	0,149
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,700	0,700	0,800	0,800	0,620	0,620
2	0,640	0,740	0,760	0,870	0,550	0,720
3	0,690	0,730	0,790	0,910	0,570	0,740
4	0,940	0,910	0,890	0,830	0,760	0,870
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,486	0,486	0,441	0,441
2	0,485	0,465	0,496	0,522	0,453	0,478
3	0,508	0,465	0,483	0,531	0,443	0,487
4	0,529	0,465	0,484	0,553	0,431	0,492

Quadro 16 – Modelo MA (3) $\Phi_1 = 0,15$ $\Phi_2 = 0,15$ $\Phi_3 = 0,225$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,085	-0,079	-0,079	-0,085	-0,079	-0,079
2	-0,106	-0,121	-0,119	-0,114	-0,147	-0,145
3	-0,205	-0,160	-0,161	-0,229	-0,173	-0,173
4	0	-0,024	-0,025	-0,063	-0,100	-0,099
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,132	0,141	0,134	0,132	0,141	0,134
2	0,149	0,144	0,131	0,136	0,141	0,134
3	0,120	0,149	0,135	0,118	0,141	0,144
4	0,135	0,154	0,128	0,122	0,141	0,144
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,850	0,850	0,780	0,780	0,830	0,830
2	0,790	0,760	0,630	0,590	0,700	0,680
3	0,780	0,700	0,580	0,620	0,680	0,690
4	0,950	0,820	0,860	0,770	0,900	0,790
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,501	0,501	0,444	0,444
2	0,475	0,465	0,491	0,504	0,435	0,445
3	0,492	0,465	0,505	0,541	0,448	0,479
4	0,509	0,465	0,478	0,536	0,424	0,475

Quadro 17 – Modelo MA(3) $\Phi_1 = 0,15$ $\Phi_2 = 0,15$ $\Phi_3 = -0,225$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,147	-0,150	-0,150	-0,147	-0,150	-0,150
2	-0,167	-0,158	-0,157	-0,193	-0,204	-0,203
3	0,205	0,151	0,151	0,156	0,091	0,091
4	0,000	-0,024	-0,024	0,027	-0,035	-0,034
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,121	0,141	0,136	0,121	0,141	0,136
2	0,133	0,146	0,133	0,137	0,141	0,138
3	0,118	0,152	0,128	0,118	0,141	0,143
4	0,127	0,156	0,127	0,128	0,141	0,145
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,760	0,760	0,590	0,590	0,670	0,670
2	0,700	0,580	0,580	0,460	0,600	0,550
3	0,780	0,880	0,840	0,950	0,610	0,810
4	0,980	0,940	0,880	0,880	0,890	0,930
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,510	0,510	0,449	0,449
2	0,481	0,465	0,492	0,512	0,439	0,458
3	0,500	0,465	0,465	0,519	0,427	0,474
4	0,515	0,465	0,474	0,541	0,424	0,484

Quadro 18 – Modelo MA(3) $\Phi_1 = 0,15$ $\Phi_2 = -0,15$ $\Phi_3 = -0,225$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,126	-0,179	-0,179	-0,126	-0,179	-0,179
2	0,106	0,104	0,105	0,091	0,050	0,052
3	0,205	0,160	0,160	0,234	0,185	0,186
4	0,000	-0,023	-0,023	0,049	0,004	0,005
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,143	0,141	0,136	0,143	0,141	0,136
2	0,140	0,148	0,129	0,164	0,141	0,137
3	0,135	0,152	0,132	0,125	0,141	0,145
4	0,130	0,158	0,130	0,126	0,141	0,149
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,640	0,640	0,530	0,530	0,580	0,580
2	0,810	0,810	0,880	0,880	0,720	0,750
3	0,740	0,600	0,810	0,820	0,600	0,580
4	0,960	0,960	0,850	0,960	0,880	0,940
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,509	0,509	0,448	0,448
2	0,488	0,465	0,475	0,503	0,426	0,452
3	0,501	0,465	0,479	0,523	0,438	0,478
4	0,520	0,465	0,484	0,558	0,428	0,493

Quadro 19 – Modelo MA(3) $\Phi_1 = 0,125$ $\Phi_2 = 0,225$ $\Phi_3 = 0,125$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,063	-0,065	-0,065	-0,063	-0,065	-0,065
2	-0,193	-0,166	-0,166	-0,198	-0,187	-0,188
3	-0,115	-0,124	-0,124	-0,149	-0,149	-0,149
4	0	-0,033	-0,033	-0,066	-0,105	-0,105
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,119	0,141	0,136	0,119	0,141	0,136
2	0,126	0,143	0,132	0,121	0,141	0,135
3	0,135	0,149	0,134	0,125	0,141	0,144
4	0,138	0,154	0,128	0,125	0,141	0,143
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC		
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,930	0,930	0,800	0,800	0,860	0,860
2	0,740	0,670	0,590	0,530	0,620	0,600
3	0,780	0,750	0,620	0,620	0,710	0,680
4	0,930	0,820	0,810	0,740	0,810	0,800
Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,508	0,508	0,451	0,451
2	0,473	0,465	0,501	0,510	0,435	0,443
3	0,492	0,465	0,496	0,534	0,444	0,478
4	0,507	0,465	0,472	0,528	0,425	0,474

Quadro 20 – Modelo MA(3) $\Phi_1 = -0,1$ $\Phi_2 = 0,2$ $\Phi_3 = 0,2$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,110	0,099	0,099	0,110	0,099	0,099
2	-0,201	-0,162	-0,163	-0,216	-0,191	-0,192
3	-0,183	-0,177	-0,177	-0,140	-0,146	-0,146
4	0,000	-0,011	-0,012	-0,005	-0,023	-0,025
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,122	0,141	0,134	0,122	0,141	0,134
2	0,132	0,144	0,134	0,134	0,141	0,137
3	0,137	0,150	0,137	0,136	0,141	0,149
4	0,136	0,156	0,127	0,109	0,141	0,145
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,890	0,890	0,920	0,920	0,840	0,840
2	0,720	0,630	0,580	0,510	0,690	0,590
3	0,690	0,700	0,530	0,670	0,590	0,720
4	0,950	0,970	0,880	0,940	0,890	0,940
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,491	0,491	0,442	0,442
2	0,476	0,465	0,502	0,514	0,441	0,452
3	0,495	0,465	0,512	0,560	0,451	0,492
4	0,516	0,465	0,476	0,540	0,422	0,481

Quadro 21 – Modelo MA(3) $\Phi_1 = -0,1$ $\Phi_2 = -0,2$ $\Phi_3 = -0,2$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,073	0,068	0,067	0,073	0,068	0,067
2	0,165	0,117	0,117	0,160	0,090	0,089
3	-0,183	-0,201	-0,200	-0,212	-0,212	-0,211
4	0,000	-0,010	-0,010	0,004	-0,021	-0,022
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,158	0,141	0,134	0,158	0,141	0,134
2	0,143	0,145	0,131	0,150	0,141	0,136
3	0,122	0,150	0,132	0,117	0,141	0,141
4	0,146	0,157	0,131	0,147	0,141	0,149
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,820	0,820	0,860	0,860	0,780	0,780
2	0,750	0,800	0,820	0,830	0,660	0,760
3	0,650	0,560	0,410	0,390	0,480	0,490
4	0,920	0,830	0,860	0,860	0,860	0,830
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,487	0,487	0,443	0,443
2	0,478	0,465	0,484	0,500	0,433	0,447
3	0,493	0,465	0,498	0,531	0,436	0,465
4	0,516	0,465	0,485	0,551	0,434	0,493

Quadro 22 – Modelo MA(3) $\Phi_1 = -0,1$ $\Phi_2 = -0,2$ $\Phi_3 = -0,2$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,146	0,092	0,092	0,146	0,092	0,092
2	0,201	0,119	0,119	0,184	0,093	0,092
3	0,183	0,125	0,124	0,139	0,103	0,103
4	0,000	-0,053	-0,053	-0,077	-0,112	-0,113
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,146	0,141	0,134	0,146	0,141	0,134
2	0,146	0,145	0,133	0,140	0,141	0,137
3	0,136	0,150	0,131	0,139	0,141	0,140
4	0,143	0,154	0,129	0,136	0,141	0,142
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,810	0,810	0,870	0,870	0,760	0,760
2	0,790	0,810	0,850	0,920	0,710	0,780
3	0,800	0,780	0,850	0,950	0,670	0,740
4	0,900	0,850	0,800	0,740	0,830	0,800
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,491	0,491	0,442	0,442
2	0,478	0,465	0,488	0,504	0,440	0,455
3	0,494	0,465	0,481	0,511	0,436	0,463
4	0,508	0,465	0,479	0,527	0,427	0,470

Quadro 23 – Modelo MA(3) $\Phi_1 = 0,1$ $\Phi_2 = 0,2$ $\Phi_3 = 0,125$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,051	-0,057	-0,057	-0,051	-0,057	-0,057
2	-0,175	-0,177	-0,177	-0,179	-0,196	-0,196
3	-0,117	-0,093	-0,093	-0,142	-0,116	-0,116
4	0,000	0,005	0,005	-0,053	-0,067	-0,068
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,115	0,141	0,134	0,115	0,141	0,134
2	0,140	0,143	0,132	0,132	0,141	0,134
3	0,119	0,150	0,130	0,118	0,141	0,141
4	0,147	0,153	0,128	0,137	0,141	0,142
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,920	0,920	0,870	0,870	0,910	0,910
2	0,620	0,580	0,510	0,460	0,580	0,540
3	0,870	0,800	0,780	0,760	0,850	0,790
4	0,920	0,890	0,840	0,810	0,790	0,840
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,503	0,503	0,446	0,446
2	0,472	0,465	0,497	0,505	0,436	0,443
3	0,495	0,465	0,486	0,526	0,433	0,468
4	0,505	0,465	0,474	0,527	0,424	0,471

Quadro 24 – Modelo MA(3) $\Phi_1 = 0,1$ $\Phi_2 = -0,2$ $\Phi_3 = 0,125$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,136	-0,151	-0,151	-0,136	-0,151	-0,151
2	0,199	0,196	0,195	0,184	0,156	0,155
3	-0,117	-0,117	-0,117	-0,073	-0,069	-0,068
4	0,000	-0,028	-0,029	-0,060	-0,098	-0,099
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,157	0,141	0,137	0,157	0,141	0,137
2	0,117	0,147	0,135	0,112	0,141	0,143
3	0,147	0,154	0,134	0,151	0,141	0,147
4	0,150	0,158	0,127	0,131	0,141	0,144
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,680	0,680	0,560	0,560	0,620	0,620
2	0,600	0,710	0,770	0,920	0,560	0,680
3	0,800	0,800	0,700	0,810	0,750	0,790
4	0,910	0,880	0,820	0,720	0,820	0,800
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,516	0,516	0,455	0,455
2	0,486	0,465	0,486	0,512	0,448	0,474
3	0,508	0,465	0,502	0,549	0,444	0,487
4	0,522	0,465	0,473	0,533	0,421	0,476

Quadro 25 – Modelo MA(3) $\Phi_1 = 0,125$ $\Phi_2 = 0,2$ $\Phi_3 = 0,2$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,054	-0,054	-0,054	-0,054	-0,054	-0,054
2	-0,159	-0,158	-0,157	-0,163	-0,184	-0,184
3	-0,182	-0,167	-0,167	-0,207	-0,192	-0,193
4	0,000	-0,016	-0,161	-0,061	-0,089	-0,089
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,140	0,141	0,135	0,140	0,141	0,135
2	0,127	0,144	0,136	0,124	0,141	0,140
3	0,136	0,151	0,132	0,123	0,141	0,142
4	0,133	0,156	0,128	0,123	0,141	0,146
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,890	0,890	0,800	0,800	0,840	0,840
2	0,720	0,620	0,570	0,500	0,680	0,610
3	0,700	0,640	0,540	0,530	0,600	0,630
4	0,940	0,880	0,870	0,820	0,850	0,880
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,499	0,499	0,446	0,446
2	0,475	0,465	0,511	0,524	0,453	0,464
3	0,493	0,465	0,497	0,537	0,436	0,472
4	0,513	0,465	0,476	0,545	0,423	0,486

Quadro 26 – Modelo MA(3) $\Phi_1 = -0,5$ $\Phi_2 = -0,5$ $\Phi_3 = -0,5$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,571	0,505	0,506	0,571	0,505	0,506
2	0,428	0,354	0,353	0,151	0,103	0,101
3	0,285	0,200	0,200	-0,013	-0,038	-0,035
4	0,000	-0,086	-0,086	-0,302	-0,294	-0,295
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,142	0,141	0,142	0,142	0,141	0,142
2	0,132	0,175	0,134	0,119	0,141	0,193
3	0,154	0,190	0,129	0,149	0,141	0,190
4	0,178	0,196	0,127	0,111	0,141	0,247
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,030	0,030	0,130	0,130	0,040	0,040
2	0,320	0,840	0,370	0,990	0,140	0,910
3	0,830	0,880	0,730	0,910	0,470	0,940
4	0,830	0,280	0,680	0,450	0,640	0,530
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,509	0,509	0,469	0,469
2	0,577	0,465	0,480	0,691	0,445	0,641
3	0,626	0,465	0,467	0,690	0,427	0,633
4	0,646	0,465	0,475	0,915	0,423	0,815

Quadro 27 – Modelo MA(3) $\Phi_1 = 0,2$ $\Phi_2 = 0,5$ $\Phi_3 = 0,1$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,038	-0,060	-0,061	-0,038	-0,060	-0,061
2	-0,396	-0,351	-0,351	-0,371	-0,368	-0,369
3	-0,076	-0,040	-0,040	-0,128	-0,104	-0,104
4	0,000	0,013	0,014	-0,179	-0,159	-0,160
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,094	0,141	0,140	0,094	0,141	0,140
2	0,116	0,143	0,141	0,115	0,141	0,142
3	0,146	0,160	0,132	0,116	0,141	0,160
4	0,139	0,163	0,129	0,118	0,141	0,161
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,960	0,960	0,890	0,890	0,920	0,920
2	0,170	0,120	0,900	0,600	0,160	0,120
3	0,880	0,860	0,780	0,770	0,800	0,880
4	0,970	0,740	0,890	0,670	0,830	0,770
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,523	0,523	0,465	0,465
2	0,470	0,465	0,535	0,542	0,464	0,470
3	0,529	0,465	0,489	0,590	0,437	0,527
4	0,538	0,465	0,476	0,591	0,430	0,533

Quadro 28 – Modelo MA(3) $\Phi_1 = 0,2$ $\Phi_2 = -0,2$ $\Phi_3 = 0,2$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,250	-0,258	-0,264	-0,250	-0,258	-0,264
2	0,214	0,197	0,194	0,161	0,113	0,105
3	-0,178	-0,160	-0,159	-0,102	-0,086	-0,086
4	0,000	-0,009	-0,108	-0,099	-0,120	-0,126
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,166	0,141	0,130	0,166	0,141	0,130
2	0,126	0,153	0,133	0,110	0,141	0,149
3	0,144	0,160	0,125	0,149	0,141	0,145
4	0,135	0,165	0,124	0,125	0,141	0,148
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,410	0,410	0,300	0,300	0,350	0,350
2	0,640	0,890	0,630	0,880	0,480	0,750
3	0,750	0,840	0,500	0,730	0,550	0,750
4	0,970	0,800	0,860	0,640	0,870	0,760
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,437	0,437	0,422	0,422
2	0,505	0,465	0,428	0,481	0,430	0,485
3	0,527	0,465	0,413	0,475	0,406	0,455
4	0,545	0,465	0,409	0,488	0,409	0,478

Quadro 29 – Modelo MA(3) $\Phi_1 = 0,2$ $\Phi_2 = 0,5$ $\Phi_3 = -0,1$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,115	-0,118	-0,118	-0,115	-0,118	-0,118
2	-0,400	-0,362	-0,363	-0,418	-0,393	-0,396
3	0,076	0,045	0,044	-0,045	-0,062	-0,006
4	0,000	-0,009	-0,008	-0,199	-0,195	-0,206
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,094	0,141	0,138	0,094	0,141	0,138
2	0,122	0,144	0,138	0,114	0,141	0,141
3	0,144	0,163	0,126	0,115	0,141	0,158
4	0,158	0,166	0,127	0,129	0,141	0,163
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,890	0,890	0,730	0,730	0,860	0,860
2	0,190	0,800	0,500	0,200	0,120	0,500
3	0,940	0,940	0,820	0,830	0,780	0,880
4	0,920	0,650	0,820	0,540	0,790	0,670
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,478	0,478	0,456	0,456
2	0,475	0,465	0,486	0,498	0,452	0,462
3	0,537	0,465	0,433	0,542	0,418	0,502
4	0,546	0,465	0,436	0,560	0,417	0,505

Quadro 30 – Modelo MA(3) $\Phi_1 = 0,5$ $\Phi_2 = -0,5$ $\Phi_3 = 0,5$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,571	-0,554	-0,555	-0,571	-0,554	-0,555
2	0,428	0,387	0,386	0,151	0,092	0,088
3	-0,285	-0,250	-0,249	0,013	0,008	0,003
4	0,000	-0,017	-0,016	-0,302	-0,273	-0,279
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,119	0,141	0,148	0,119	0,141	0,148
2	0,129	0,180	0,136	0,123	0,141	0,211
3	0,145	0,197	0,131	0,122	0,141	0,210
4	0,175	0,205	0,125	0,125	0,141	0,301
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010
2	0,240	0,860	0,270	0,980	0,090	0,910
3	0,710	0,960	0,290	0,960	0,410	0,950
4	0,950	0,370	0,700	0,540	0,710	0,650
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,465	0,465	0,546	0,546	0,483	0,483
2	0,594	0,465	0,477	0,737	0,453	0,681
3	0,650	0,465	0,487	0,777	0,432	0,677
4	0,675	0,465	0,457	1,098	0,411	0,982

Quadro 31 – Modelo ARMA(2,2) $\Phi_1 = 0,2$ $\Phi_2 = 0,2$ $\theta_1 = 0,2$ $\theta_2 = 0,2$ $n=50$

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0.800	0.495	0.495	0.800	0.495	0.495
2	0.897	0.408	0.408	0.716	0.186	0.189
3	0.779	0.370	0.370	0.015	0.137	0.136
4	0.829	0.289	0.289	0.049	0.002	0.002
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0.192	0.141	0.136	0.192	0.141	0.136
2	0.202	0.175	0.128	0.139	0.141	0.193
3	0.203	0.196	0.129	0.138	0.141	0.206
4	0.214	0.211	0.122	0.126	0.141	0.485
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.090	0.090	0.170	0.170	0.090	0.090
2	0.250	0.250	0.290	0.940	0.150	0.780
3	0.400	0.750	0.400	0.980	0.230	0.910
4	0.620	0.940	0.470	0.980	0.320	0.960
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.465	0.465	0.487	0.487	0.451	0.451
2	0.578	0.465	0.458	0.689	0.424	0.641
3	0.645	0.465	0.460	0.734	0.428	0.684
4	0.696	0.465	0.442	1.780	0.403	1.592

Quadro 32 – Modelo ARMA(2,2) $\Phi_1 = 0,5$ $\Phi_2 = -0,5$ $\theta_1 = -0,4$ $\theta_2 = 0,4$ $n=50$

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0.347	0.322	0.321	0.347	0.322	0.321
2	-0.547	-0.471	-0.471	-0.758	-0.648	-0.649
3	-0.446	-0.368	-0.368	0.405	0.161	0.164
4	0.049	0.042	0.042	-0.738	-0.246	-0.253
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0.062	0.141	0.137	0.062	0.141	0.137
2	0.104	0.155	0.143	0.086	0.141	0.161
3	0.138	0.183	0.133	0.121	0.141	0.273
4	0.153	0.198	0.125	0.118	0.141	0.293
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.080	0.080	0.420	0.420	0.040	0.040
2	0.010	0.000	0.000	0.000	0.010	0.000
3	0.270	0.710	0.090	0.990	0.120	0.960
4	0.970	0.490	0.850	0.790	0.780	0.880
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.465	0.465	0.493	0.493	0.455	0.455
2	0.512	0.465	0.551	0.619	0.474	0.533
3	0.602	0.465	0.510	1.041	0.443	0.902
4	0.654	0.465	0.460	1.078	0.415	0.971

Quadro 33 – Modelo ARMA(2,2) $\Phi_1 = 0,3$ $\Phi_2 = -0,2$ $\theta_1 = 0,4$ $\theta_2 = -0,4$ $n=50$

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0.023	-0.195	-0.195	-0.023	-0.195	-0.194
2	0.091	0.105	0.104	0.090	0.072	0.072
3	0.032	0.052	0.051	0.036	0.783	0.077
4	-0.008	-0.042	-0.409	-0.015	-0.052	-0.511
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0.145	0.141	0.136	0.145	0.141	0.136
2	0.129	0.146	0.131	0.115	0.141	0.137
3	0.160	0.149	0.130	0.147	0.141	0.138
4	0.144	0.153	0.131	0.134	0.141	0.144
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.810	0.810	0.690	0.690	0.740	0.740
2	0.840	0.890	0.910	0.960	0.810	0.860
3	0.870	0.830	0.880	0.900	0.760	0.770
4	0.900	0.880	0.780	0.810	0.820	0.870
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.465	0.465	0.504	0.504	0.450	0.450
2	0.480	0.465	0.478	0.497	0.438	0.455
3	0.491	0.465	0.482	0.510	0.431	0.457
4	0.503	0.465	0.487	0.532	0.437	0.477

Quadro 34 – Modelo ARMA(2,2) $\Phi_1 = -0,4$ $\Phi_2 = 0,3$ $\theta_1 = -0,4$ $\theta_2 = 0,5$ $n=50$

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0.339	-0.033	-0.033	-0.339	-0.033	-0.033
2	0.232	-0.163	-0.163	0.132	-0.175	-0.176
3	-0.194	0.039	0.039	-0.093	0.025	0.025
4	0.147	-0.054	-0.050	0.042	-0.928	-0.093
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0.098	0.141	0.133	0.098	0.141	0.133
2	0.116	0.142	0.133	0.117	0.141	0.134
3	0.134	0.148	0.129	0.133	0.141	0.137
4	0.135	0.150	0.130	0.132	0.141	0.141
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.970	0.970	0.940	0.940	0.960	0.960
2	0.740	0.730	0.520	0.480	0.610	0.590
3	0.930	0.930	0.910	0.910	0.890	0.890
4	0.900	0.830	0.829	0.720	0.860	0.850
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.465	0.465	0.493	0.493	0.439	0.439
2	0.470	0.465	0.499	0.504	0.441	0.446
3	0.487	0.465	0.477	0.507	0.429	0.456
4	0.496	0.465	0.484	0.525	0.432	0.468

Quadro 35 – Modelo ARMA(2,2) $\Phi_1 = -0,4$ $\Phi_2 = 0,2$ $\theta_1 = 0,5$ $\theta_2 = -0,5$ $n=50$

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0.897	-0.800	-0.800	-0.897	-0.800	-0.800
2	0.726	0.618	0.618	0.408	-0.083	-0.088
3	-0.470	-0.379	-0.379	0.505	0.246	0.232
4	0.333	0.244	0.244	1.014	0.089	0.064
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0.067	0.141	0.156	0.067	0.141	0.156
2	0.125	0.213	0.141	0.191	0.141	0.444
3	0.199	0.247	0.129	0.124	0.141	0.437
4	0.240	0.261	0.123	0.123	0.141	7.395
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.000	0.750	0.000	1.000	0.000	0.980
3	0.510	0.450	0.220	1.000	0.250	0.940
4	0.810	0.840	0.470	1.000	0.330	1.000
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.465	0.465	0.594	0.595	0.519	0.519
2	0.703	0.465	0.503	1.574	0.470	1.468
3	0.814	0.465	0.488	1.643	0.426	1.426
4	0.858	0.465	0.448	2.780	0.407	2.412

Quadro 36 – Modelo ARMA(2,2) $\Phi_1 = -0,3$ $\Phi_2 = -0,6$ $\theta_1 = 0,4$ $\theta_2 = -0,5$ $n=50$

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0.344	-0.437	-0.437	-0.344	-0.437	-0.437
2	-0.328	-0.180	-0.180	-0.508	-0.468	-0.468
3	0.305	0.296	0.296	-0.062	-0.029	-0.032
4	0.105	0.019	0.019	0.115	0.151	0.149
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,079	0.141	0.143	0.079	0.141	0.143
2	0.151	0.166	0.131	0.116	0.141	0.164
3	0.137	0.173	0.134	0.145	0.141	0.224
4	0.146	0.185	0.131	0.118	0.141	0.228
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.720	0.020	0.470	0.030	0.590	0.060
3	0.410	0.850	0.520	0.970	0.260	0.970
4	0.960	0.730	0.870	1.000	0.820	0.910
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.465	0.465	0.548	0.548	0.478	0.478
2	0.548	0.465	0.487	0.612	0.430	0.540
3	0.570	0.465	0.482	0.807	0.441	0.739
4	0.608	0.465	0.480	0.833	0.433	0.755

Quadro 36 – Modelo ARMA(2,2) $\Phi_1 = -0,2$ $\Phi_2 = 0,3$ $\theta_1 = -0,2$ $\theta_2 = 0,3$ $n=50$

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0.108	-0.008	-0.008	-0.108	-0.008	-0.008
2	0.136	-0.028	-0.028	0.125	-0.051	-0.051
3	-0.059	-0.007	-0.008	-0.034	-0.015	-0.016
4	0.052	-0.025	-0.025	0.027	-0.054	-0.053
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0.147	0.141	0.135	0.147	0.141	0.135
2	0.146	0.144	0.133	0.149	0.141	0.136
3	0.107	0.147	0.128	0.107	0.141	0.134
4	0.157	0.148	0.127	0.149	0.141	0.135
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.880	0.880	0.850	0.850	0.830	0.830
2	0.880	0.860	0.800	0.770	0.830	0.810
3	0.960	0.960	0.950	0.920	0.930	0.920
4	0.850	0.840	0.780	0.770	0.810	0.800
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.465	0.465	0.504	0.504	0.446	0.446
2	0.474	0.465	0.495	0.506	0.442	0.451
3	0.484	0.465	0.477	0.500	0.423	0.443
4	0.489	0.465	0.471	0.500	0.422	0.449

Quadro 38 – Modelo ARMA(2,2) $\Phi_1 = 0,1$ $\Phi_2 = -0,1$ $\theta_1 = 0,2$ $\theta_2 = 0,1$ $n=50$

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0.078	-0.070	-0.070	-0.078	-0.070	-0.070
2	-0.206	-0.211	-0.211	-0.213	-0.238	-0.239
3	-0.012	-0.017	-0.017	-0.051	-0.048	-0.049
4	0.019	0.004	0.004	-0.032	-0.065	-0.066
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0.130	0.141	0.134	0.130	0.141	0.134
2	0.130	0.144	0.133	0.125	0.141	0.136
3	0.133	0.152	0.132	0.125	0.141	0.147
4	0.148	0.154	0.128	0.144	0.141	0.144
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.910	0.910	0.850	0.850	0.870	0.870
2	0.610	0.500	0.420	0.360	0.530	0.450
3	0.930	0.890	0.840	0.860	0.880	0.920
4	0.880	0.870	0.830	0.870	0.830	0.850
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.465	0.465	0.498	0.498	0.440	0.440
2	0.474	0.465	0.500	0.512	0.441	0.451
3	0.500	0.465	0.489	0.542	0.437	0.486
4	0.509	0.465	0.472	0.534	0.421	0.476

Quadro 39 – Modelo ARMA(2,2) $\Phi_1 = -0,2$ $\Phi_2 = 0,1$ $\theta_1 = -0,2$ $\theta_2 = 0,1$ $n=50$

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0.010	-0.017	-0.191	0.010	-0.017	-0.191
2	0.006	-0.012	-0.125	0.006	-0.032	-0.031
3	-0.002	-0.030	-0.030	-0.002	-0.298	-0.297
4	0.001	-0.015	-0.153	0.001	-0.387	-0.393
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0.137	0.141	0.133	0.137	0.141	0.133
2	0.130	0.144	0.130	0.127	0.141	0.132
3	0.129	0.146	0.131	0.131	0.141	0.137
4	0.117	0.148	0.130	0.115	0.141	0.138
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.910	0.910	0.850	0.850	0.850	0.850
2	0.950	0.940	0.880	0.830	0.890	0.880
3	0.930	0.920	0.830	0.860	0.870	0.860
4	0.960	0.940	0.880	0.890	0.880	0.880
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.465	0.465	0.491	0.491	0.440	0.440
2	0.473	0.465	0.479	0.489	0.427	0.436
3	0.481	0.465	0.485	0.505	0.437	0.454
4	0.489	0.465	0.484	0.514	0.431	0.456

Quadro 40 – Modelo ARMA(2,2) $\Phi_1 = 0,2$ $\Phi_2 = -0,2$ $\theta_1 = 0,3$ $\theta_2 = -0,1$ **n=50**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0.068	-0.096	-0.096	-0.068	-0.096	-0.096
2	-0.122	-0.125	-0.125	-0.127	-0.151	-0.151
3	-0.010	-0.000	-0.002	-0.029	-0.030	-0.032
4	0.022	-0.002	-0.002	0.003	-0.043	-0.043
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0.115	0.141	0.135	0.115	0.141	0.135
2	0.135	0.144	0.133	0.135	0.141	0.136
3	0.136	0.149	0.133	0.130	0.141	0.142
4	0.131	0.151	0.132	0.138	0.141	0.144
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.900	0.900	0.760	0.760	0.810	0.810
2	0.780	0.740	0.640	0.560	0.680	0.660
3	0.920	0.910	0.890	0.870	0.880	0.890
4	0.960	0.860	0.860	0.840	0.880	0.860
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0.465	0.465	0.497	0.497	0.443	0.443
2	0.475	0.465	0.498	0.510	0.437	0.447
3	0.490	0.465	0.485	0.518	0.440	0.471
4	0.498	0.465	0.485	0.528	0.436	0.473

Quadro 41 – Modelo AR(3) $\Phi_1 = 0,2$ $\Phi_2 = 0,2$ $\Phi_3 = 0,2$ n=30						
lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,333	0,199	0,199	0,333	0,199	0,199
2	0,333	0,165	0,165	0,250	0,087	0,086
3	0,333	0,170	0,170	0,200	0,096	0,096
4	0,200	0,044	0,044	0,000	-0,060	-0,060
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,223	0,182	0,166	0,223	0,182	0,166
2	0,204	0,197	0,162	0,178	0,182	0,181
3	0,178	0,207	0,159	0,168	0,182	0,186
4	0,185	0,216	0,158	0,154	0,182	0,218
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,700	0,700	0,740	0,740	0,610	0,610
2	0,770	0,870	0,760	0,900	0,660	0,870
3	0,850	0,870	0,860	0,940	0,670	0,810
4	0,970	0,940	0,840	0,880	0,810	0,930
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,600	0,600	0,602	0,602	0,549	0,549
2	0,649	0,600	0,584	0,653	0,534	0,596
3	0,683	0,600	0,575	0,673	0,527	0,616
4	0,712	0,600	0,811	0,801	0,525	0,725

Quadro 42 – Modelo AR(3) $\Phi_1 = 0,15$ $\Phi_2 = 0,15$ $\Phi_3 = -0,225$ **n=30**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,139	0,129	0,128	0,139	0,129	0,128
2	0,139	0,121	0,121	0,122	0,057	0,058
3	-0,183	-0,200	-0,201	-0,225	-0,216	-0,216
4	-0,037	-0,068	-0,068	0,000	-0,063	-0,065
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,214	0,182	0,163	0,214	0,182	0,163
2	0,178	0,193	0,167	0,204	0,182	0,179
3	0,184	0,200	0,167	0,170	0,182	0,188
4	0,185	0,212	0,158	0,156	0,182	0,196
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,730	0,730	0,760	0,760	0,610	0,610
2	0,840	0,850	0,880	0,870	0,770	0,830
3	0,780	0,710	0,560	0,560	0,590	0,660
4	0,930	0,930	0,730	0,860	0,740	0,850
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,600	0,600	0,589	0,589	0,540	0,540
2	0,635	0,600	0,601	0,644	0,554	0,595
3	0,660	0,600	0,626	0,703	0,557	0,628
4	0,699	0,600	0,583	0,722	0,524	0,651

Quadro 43 – Modelo AR(3) $\Phi_1 = 0,15$ $\Phi_2 = -0,15$ $\Phi_3 = -0,225$ **n=30**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,162	0,120	0,120	0,162	0,120	0,120
2	-0,162	-0,178	-0,178	-0,193	-0,220	-0,221
3	-0,273	-0,265	-0,265	-0,225	-0,215	-0,214
4	-0,053	-0,074	-0,074	0,000	-0,082	-0,083
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,135	0,182	0,170	0,135	0,182	0,170
2	0,166	0,188	0,170	0,183	0,182	0,176
3	0,155	0,198	0,168	0,144	0,182	0,193
4	0,174	0,218	0,152	0,158	0,182	0,189
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC		
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,910	0,910	0,960	0,960	0,820	0,820
2	0,720	0,650	0,620	0,540	0,690	0,600
3	0,620	0,730	0,390	0,600	0,480	0,660
4	0,950	0,920	0,750	0,860	0,810	0,880
Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,600	0,600	0,617	0,617	0,562	0,562
2	0,619	0,600	0,641	0,665	0,562	0,584
3	0,652	0,600	0,635	0,729	0,559	0,643
4	0,700	0,600	0,563	0,699	0,507	0,631

Quadro 44 – Modelo AR(3) $\Phi_1 = 0,125$ $\Phi_2 = 0,225$ $\Phi_3 = 0,125$ **n=30**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,205	0,108	0,108	0,205	0,108	0,108
2	0,276	0,185	0,185	0,244	0,139	0,140
3	0,205	0,090	0,091	0,125	0,049	0,048
4	0,113	0,006	0,005	0,000	-0,065	-0,065
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,202	0,182	0,162	0,202	0,182	0,162
2	0,167	0,191	0,162	0,166	0,182	0,171
3	0,162	0,201	0,155	0,161	0,182	0,172
4	0,181	0,207	0,158	0,174	0,182	0,182
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,810	0,810	0,840	0,840	0,680	0,680
2	0,760	0,820	0,780	0,870	0,590	0,720
3	0,950	0,930	0,860	0,930	0,780	0,890
4	0,960	0,910	0,850	0,820	0,800	0,870
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,600	0,600	0,591	0,591	0,541	0,541
2	0,630	0,600	0,588	0,623	0,536	0,570
3	0,663	0,600	0,557	0,620	0,509	0,567
4	0,681	0,600	0,579	0,668	0,526	0,605

Quadro 45 – Modelo AR(3)		$\Phi_1 = 0,5$		$\Phi_2 = -0,5$	$\Phi_3 = 0,5$	n=30
lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,250	0,186	0,185	0,250	0,186	0,185
2	-0,250	-0,313	-0,313	-0,333	-0,383	-0,384
3	0,250	0,150	0,151	0,500	0,322	0,322
4	0,375	0,242	0,244	0,000	-0,052	-0,054
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,146	0,182	0,168	0,146	0,182	0,168
2	0,219	0,192	0,168	0,158	0,182	0,178
3	0,166	0,215	0,156	0,168	0,182	0,208
4	0,204	0,223	0,157	0,167	0,182	0,248
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,780	0,780	0,880	0,880	0,710	0,710
2	0,460	0,310	0,330	0,170	0,340	0,220
3	0,860	0,400	0,880	0,710	0,700	0,490
4	0,710	0,900	0,660	0,880	0,440	0,930
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,600	0,600	0,607	0,607	0,556	0,556
2	0,632	0,600	0,640	0,680	0,557	0,592
3	0,709	0,600	0,563	0,751	0,516	0,687
4	0,734	0,600	0,555	0,876	0,521	0,823

Quadro 46 – Modelo AR(3) $\Phi_1 = 0,2$ $\Phi_2 = 0,2$ $\Phi_3 = 0,2$ **n=100**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,333	0,266	0,266	0,333	0,266	0,266
2	0,333	0,265	0,265	0,250	0,199	0,199
3	0,333	0,282	0,282	0,200	0,191	0,191
4	0,200	0,132	0,133	0,000	-0,025	-0,025
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,122	0,100	0,099	0,122	0,100	0,097
2	0,120	0,108	0,098	0,097	0,100	0,108
3	0,112	0,115	0,097	0,088	0,100	0,114
4	0,127	0,122	0,096	0,103	0,100	0,122
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC		
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,190	0,190	0,340	0,340	0,170	0,170
2	0,220	0,340	0,360	0,690	0,190	0,380
3	0,200	0,410	0,320	0,680	0,110	0,440
4	0,700	0,880	0,780	0,900	0,580	0,910
Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,328	0,328	0,362	0,362	0,328	0,328
2	0,355	0,328	0,355	0,392	0,324	0,357
3	0,379	0,328	0,352	0,411	0,322	0,377
4	0,403	0,328	0,352	0,447	0,317	0,402

Quadro 47 – Modelo AR(3) $\Phi_1 = 0,15$ $\Phi_2 = 0,15$ $\Phi_3 = -0,225$ **n=100**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,139	0,126	0,127	0,139	0,126	0,127
2	0,139	0,121	0,121	0,122	0,091	0,091
3	-0,183	-0,195	-0,196	-0,225	-0,223	-0,224
4	-0,037	-0,039	-0,039	0,000	-0,009	-0,008
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,124	0,100	0,097	0,124	0,100	0,097
2	0,098	0,103	0,096	0,108	0,100	0,099
3	0,090	0,105	0,098	0,089	0,100	0,103
4	0,118	0,109	0,096	0,103	0,100	0,108
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,550	0,550	0,760	0,760	0,540	0,540
2	0,700	0,740	0,860	0,890	0,660	0,730
3	0,420	0,230	0,250	0,160	0,330	0,230
4	0,900	0,900	0,740	0,930	0,790	0,910
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,328	0,328	0,354	0,354	0,319	0,319
2	0,339	0,328	0,352	0,364	0,318	0,329
3	0,346	0,328	0,368	0,388	0,324	0,342
4	0,360	0,328	0,355	0,398	0,319	0,358

Quadro 48 – Modelo AR(3) $\Phi_1 = 0,15$ $\Phi_2 = -0,15$ $\Phi_3 = -0,225$ **n=100**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,162	0,141	0,141	0,162	0,141	0,141
2	-0,162	-0,167	-0,167	-0,193	-0,200	-0,199
3	-0,273	-0,274	-0,274	-0,225	-0,226	-0,226
4	-0,053	-0,044	-0,045	0,000	-0,014	-0,014
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,079	0,100	0,099	0,079	0,100	0,099
2	0,099	0,125	0,097	0,110	0,100	0,100
3	0,091	0,106	0,099	0,092	0,100	0,107
4	0,101	0,113	0,095	0,095	0,100	0,110
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,590	0,590	0,860	0,860	0,520	0,520
2	0,490	0,350	0,340	0,270	0,440	0,350
3	0,130	0,220	0,080	0,170	0,120	0,240
4	0,930	0,920	0,820	0,910	0,860	0,940
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,328	0,328	0,359	0,359	0,326	0,326
2	0,337	0,328	0,363	0,373	0,321	0,330
3	0,349	0,328	0,372	0,405	0,326	0,355
4	0,373	0,328	0,351	0,407	0,314	0,364

Quadro 49 – Modelo AR(3) $\Phi_1 = 0,125$ $\Phi_2 = 0,225$ $\Phi_3 = 0,125$ **n=100**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,205	0,183	0,184	0,205	0,183	0,184
2	0,276	0,233	0,233	0,244	0,194	0,194
3	0,205	0,184	0,184	0,125	0,118	0,118
4	0,113	0,075	0,075	0,000	-0,023	-0,022
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,127	0,100	0,099	0,127	0,100	0,099
2	0,105	0,104	0,097	0,094	0,100	0,102
3	0,105	0,110	0,098	0,092	0,100	0,109
4	0,108	0,114	0,095	0,096	0,100	0,109
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,430	0,430	0,640	0,640	0,440	0,440
2	0,230	0,370	0,420	0,660	0,180	0,330
3	0,520	0,730	0,640	0,890	0,470	0,740
4	0,920	0,870	0,920	0,870	0,740	0,910
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,328	0,328	0,358	0,358	0,327	0,327
2	0,344	0,328	0,350	0,370	0,319	0,338
3	0,364	0,328	0,355	0,394	0,325	0,360
4	0,376	0,328	0,350	0,400	0,314	0,359

Quadro 50 – Modelo AR(3) $\Phi_1 = 0,5$ $\Phi_2 = -0,5$ $\Phi_3 = 0,5$ **n=100**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	0,250	0,225	0,225	0,250	0,225	0,225
2	-0,250	-0,280	-0,280	-0,333	-0,358	-0,359
3	0,250	0,215	0,214	0,500	0,445	0,447
4	0,375	0,339	0,339	0,000	-0,010	-0,014
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,096	0,100	0,099	0,096	0,100	0,099
2	0,143	0,105	0,098	0,095	0,100	0,105
3	0,082	0,114	0,097	0,084	0,100	0,120
4	0,097	0,119	0,100	0,089	0,100	0,160
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,250	0,250	0,550	0,550	0,240	0,240
2	0,230	0,020	0,140	0,010	0,180	0,030
3	0,370	0,000	0,510	0,000	0,210	0,000
4	0,080	0,950	0,090	0,970	0,060	0,990
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,328	0,328	0,360	0,360	0,329	0,329
2	0,347	0,328	0,369	0,393	0,326	0,348
3	0,377	0,328	0,350	0,435	0,320	0,398
4	0,392	0,328	0,357	0,571	0,332	0,531

Quadro 51 – Modelo MA(3) $\theta_1 = 0,15$ $\theta_2 = 0,15$ $\theta_3 = -0,225$ **n=30**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,147	-0,151	-0,150	-0,147	-0,151	-0,150
2	-0,167	-0,180	-0,180	-0,193	-0,233	-0,234
3	0,205	0,150	0,150	0,156	0,089	0,087
4	0,000	-0,025	-0,025	0,027	-0,045	-0,046
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,143	0,182	0,170	0,143	0,182	0,170
2	0,154	0,190	0,164	0,152	0,182	0,172
3	0,161	0,199	0,161	0,156	0,182	0,185
4	0,165	0,207	0,158	0,149	0,182	0,187
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,850	0,850	0,670	0,670	0,730	0,730
2	0,810	0,660	0,590	0,460	0,680	0,560
3	0,870	0,900	0,840	0,950	0,750	0,870
4	0,950	0,940	0,820	0,900	0,840	0,920
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,600	0,600	0,632	0,632	0,569	0,569
2	0,625	0,600	0,618	0,647	0,548	0,573
3	0,656	0,600	0,583	0,669	0,537	0,616
4	0,681	0,600	0,576	0,684	0,522	0,622

Quadro 52 – Modelo MA(3) $\theta_1 = 0,15$ $\theta_2 = -0,15$ $\theta_3 = -0,225$ **n=30**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,126	-0,163	-0,163	-0,126	-0,163	-0,163
2	0,106	0,065	0,065	0,091	0,098	0,095
3	0,205	0,119	0,119	0,234	0,132	0,132
4	0,000	-0,047	-0,048	0,049	-0,038	-0,039
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,161	0,182	0,167	0,161	0,182	0,167
2	0,160	0,191	0,164	0,178	0,182	0,174
3	0,157	0,196	0,159	0,152	0,182	0,174
4	0,175	0,203	0,159	0,157	0,182	0,183
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,800	0,800	0,590	0,590	0,650	0,650
2	0,960	0,930	0,940	0,890	0,810	0,860
3	0,910	0,870	0,900	0,940	0,750	0,760
4	0,940	0,940	0,800	0,860	0,810	0,890
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,600	0,600	0,626	0,626	0,555	0,555
2	0,630	0,600	0,604	0,642	0,543	0,580
3	0,647	0,600	0,575	0,631	0,526	0,580
4	0,668	0,600	0,583	0,669	0,526	0,604

Quadro 53 – Modelo MA(3) $\theta_1 = 0,125$ $\theta_2 = 0,225$ $\theta_3 = 0,125$ **n=30**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,063	-0,089	-0,089	-0,063	-0,089	-0,089
2	-0,193	-0,161	-0,161	-0,198	-0,198	-0,198
3	-0,115	-0,092	-0,093	-0,149	-0,126	-0,128
4	0,000	-0,013	-0,013	-0,066	-0,092	-0,094
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,154	0,182	0,169	0,154	0,182	0,169
2	0,184	0,188	0,169	0,179	0,182	0,175
3	0,177	0,198	0,163	0,166	0,182	0,183
4	0,173	0,204	0,160	0,140	0,182	0,189
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,920	0,920	0,780	0,780	0,860	0,860
2	0,800	0,710	0,660	0,590	0,720	0,660
3	0,900	0,860	0,750	0,730	0,810	0,790
4	0,960	0,930	0,870	0,880	0,840	0,910
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,600	0,600	0,622	0,622	0,562	0,562
2	0,618	0,600	0,624	0,646	0,563	0,581
3	0,651	0,600	0,599	0,673	0,541	0,604
4	0,673	0,600	0,577	0,680	0,527	0,626

Quadro 54 – Modelo MA(3) $\theta_1 = 0,2$ $\theta_2 = -0,2$ $\theta_3 = 0,2$ **n=30**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,250	-0,259	-0,257	-0,250	-0,259	-0,257
2	0,214	0,164	0,164	0,161	0,069	0,070
3	-0,178	-0,158	-0,159	-0,102	-0,097	-0,098
4	0,000	-0,023	-0,022	-0,099	-0,130	-0,128
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,190	0,182	0,170	0,190	0,182	0,170
2	0,168	0,199	0,158	0,142	0,182	0,179
3	0,168	0,208	0,159	0,160	0,182	0,184
4	0,200	0,216	0,154	0,170	0,182	0,191
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,540	0,540	0,440	0,440	0,480	0,480
2	0,870	0,960	0,820	0,930	0,640	0,900
3	0,900	0,920	0,600	0,800	0,690	0,870
4	0,960	0,830	0,800	0,720	0,730	0,810
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,600	0,600	0,634	0,634	0,563	0,563
2	0,657	0,600	0,566	0,640	0,526	0,598
3	0,685	0,600	0,589	0,684	0,530	0,612
4	0,710	0,600	0,567	0,700	0,512	0,635

Quadro 55 – Modelo MA(3) $\theta_1 = 0,2$ $\theta_2 = 0,5$ $\theta_3 = -0,1$ **n=30**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,115	-0,107	-0,110	-0,115	-0,107	-0,110
2	-0,400	-0,348	-0,348	-0,418	-0,388	-0,389
3	0,076	0,047	0,047	-0,045	-0,057	-0,061
4	0,000	-0,015	-0,015	-0,199	-0,179	-0,183
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,129	0,182	0,168	0,129	0,182	0,168
2	0,139	0,187	0,172	0,139	0,182	0,178
3	0,193	0,210	0,157	0,149	0,182	0,199
4	0,186	0,216	0,156	0,159	0,182	0,204
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,910	0,910	0,830	0,830	0,880	0,880
2	0,360	0,190	0,140	0,100	0,220	0,160
3	0,890	0,940	0,830	0,880	0,790	0,940
4	0,950	0,760	0,800	0,680	0,790	0,800
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,600	0,600	0,623	0,623	0,555	0,555
2	0,617	0,600	0,651	0,672	0,570	0,587
3	0,693	0,600	0,568	0,721	0,520	0,660
4	0,712	0,600	0,564	0,735	0,516	0,680

Quadro 56 – Modelo MA(3) $\theta_1 = 0,15$ $\theta_2 = 0,15$ $\theta_3 = -0,225$ **n=100**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,147	-0,157	-0,157	-0,147	-0,157	-0,157
2	-0,167	-0,157	-0,158	-0,193	-0,196	-0,196
3	0,205	0,177	0,177	0,156	0,123	0,122
4	0,000	-0,009	-0,009	0,027	0,005	0,005
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,083	0,100	0,097	0,083	0,100	0,097
2	0,096	0,103	0,098	0,103	0,100	0,101
3	0,090	0,106	0,099	0,083	0,100	0,108
4	0,092	0,109	0,097	0,088	0,100	0,108
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,500	0,500	0,390	0,390	0,500	0,500
2	0,610	0,470	0,450	0,350	0,530	0,420
3	0,490	0,680	0,660	0,940	0,430	0,700
4	0,960	0,930	0,900	0,970	0,930	0,940
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,328	0,328	0,363	0,363	0,321	0,321
2	0,339	0,328	0,367	0,379	0,323	0,334
3	0,349	0,328	0,358	0,390	0,326	0,356
4	0,361	0,328	0,359	0,401	0,322	0,359

Quadro 57 – Modelo MA(3) $\theta_1 = 0,15$ $\theta_2 = -0,15$ $\theta_3 = -0,225$ **n=100**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,126	-0,142	-0,143	-0,126	-0,142	-0,143
2	0,106	0,107	0,106	0,091	0,076	0,075
3	0,205	0,176	0,175	0,234	0,205	0,204
4	0,000	-0,013	-0,011	0,049	0,241	0,025
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,107	0,100	0,096	0,107	0,100	0,096
2	0,096	0,103	0,097	0,104	0,100	0,100
3	0,093	0,105	0,097	0,086	0,100	0,102
4	0,106	0,108	0,093	0,106	0,100	0,104
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,590	0,590	0,440	0,440	0,510	0,510
2	0,780	0,810	0,880	0,870	0,680	0,780
3	0,490	0,280	0,670	0,590	0,400	0,280
4	0,910	0,890	0,810	0,900	0,810	0,870
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,328	0,328	0,353	0,353	0,320	0,320
2	0,339	0,328	0,350	0,362	0,321	0,331
3	0,345	0,328	0,344	0,362	0,322	0,338
4	0,357	0,328	0,341	0,379	0,308	0,344

Quadro 58 – Modelo MA(3) $\theta_1 = 0,125$ $\theta_2 = 0,225$ $\theta_3 = 0,125$ **n=100**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,063	-0,069	-0,069	-0,063	-0,069	-0,069
2	-0,193	-0,197	-0,197	-0,198	-0,211	-0,211
3	-0,115	-0,121	-0,120	-0,149	-0,156	-0,156
4	0,000	0,014	0,014	-0,066	-0,064	-0,064
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,083	0,100	0,096	0,083	0,100	0,096
2	0,090	0,101	0,099	0,086	0,100	0,101
3	0,090	0,105	0,096	0,081	0,100	0,103
4	0,102	0,107	0,096	0,104	0,100	0,106
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,860	0,860	0,730	0,730	0,840	0,840
2	0,290	0,260	0,220	0,160	0,270	0,260
3	0,680	0,520	0,520	0,390	0,590	0,530
4	0,900	0,870	0,910	0,770	0,830	0,830
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,328	0,328	0,355	0,355	0,317	0,317
2	0,332	0,328	0,372	0,377	0,329	0,333
3	0,347	0,328	0,357	0,382	0,319	0,342
4	0,354	0,328	0,356	0,394	0,319	0,352

Quadro 59 – Modelo MA(3) $\theta_1 = -0,2$ $\theta_2 = -0,2$ $\theta_3 = 0,2$ **n=100**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,250	-0,232	-0,233	-0,250	-0,232	-0,233
2	0,214	0,184	0,182	0,161	0,127	0,124
3	-0,178	-0,180	-0,180	-0,102	-0,118	-0,120
4	0,000	-0,006	-0,005	-0,099	-0,104	-0,104
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,108	0,100	0,097	0,108	0,100	0,097
2	0,091	0,106	0,095	0,081	0,100	0,103
3	0,103	0,110	0,096	0,106	0,100	0,106
4	0,101	0,113	0,092	0,100	0,100	0,105
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,240	0,240	0,170	0,170	0,280	0,280
2	0,480	0,630	0,610	0,820	0,330	0,620
3	0,470	0,640	0,290	0,560	0,400	0,640
4	0,950	0,700	0,870	0,650	0,830	0,720
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,328	0,328	0,363	0,363	0,328	0,328
2	0,349	0,328	0,344	0,370	0,324	0,347
3	0,362	0,328	0,367	0,404	0,326	0,358
4	0,374	0,328	0,340	0,387	0,304	0,348

Quadro 60 – Modelo MA(3) $\theta_1 = 0,2$ $\theta_2 = 0,5$ $\theta_3 = -0,1$ **n=100**

lag	ρ_k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\rho}_k^*$	φ_{kk}	$\hat{\varphi}_{kk}$	$\hat{\varphi}_{kk}^*$
1	-0,115	-0,109	-0,109	-0,115	-0,109	-0,109
2	-0,400	-0,395	-0,396	-0,418	-0,419	-0,420
3	0,076	0,064	0,064	-0,045	-0,052	-0,052
4	0,000	0,010	0,011	-0,199	-0,184	-0,185
	$\sigma(\rho_k)$	$s(\hat{\rho}_k)$	$s(\hat{\rho}_k^*)$	$\sigma(\varphi_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk})$	$s(\hat{\varphi}_{kk}^*)$
1	0,071	0,100	0,098	0,071	0,100	0,098
2	0,071	0,101	0,101	0,069	0,100	0,103
3	0,118	0,116	0,096	0,091	0,100	0,120
4	0,107	0,117	0,094	0,093	0,100	0,119
Probabilidade de Cobertura do Zero pelo Intervalo						
	Clássico		Percentílico Assimétrico		Percentílico BC	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,760	0,760	0,610	0,610	0,750	0,750
2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,830	0,890	0,840	0,860	0,740	0,920
4	0,920	0,430	0,870	0,400	0,830	0,490
	Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo		Amplitude Intervalo	
	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}	ρ_k	φ_{kk}
1	0,328	0,328	0,362	0,362	0,322	0,322
2	0,334	0,328	0,381	0,388	0,338	0,344
3	0,382	0,328	0,353	0,441	0,318	0,398
4	0,387	0,328	0,346	0,438	0,310	0,394

APÊNDICE B – PROGRAMAS COMPUTACIONAIS

O programa principal tem o objetivo de executar a simulação na fase de identificação da estrutura. Ele chama os módulos Variáveis, Procs e Boot e também a subrotina ord, para trabalhos parciais em sua estrutura. Inicia o elo Monte Carlo gerando uma série temporal a partir um modelo fornecido. O módulo Procs executa a tarefa de gerar a série temporal com resíduo Gaussiano. No programa principal são calculados os valores da FAC e FACP, verdadeiros e amostrais. O módulo Boot gera as B amostras *Bootstrap*, e calcula os respectivos valores da FAC e FACP. Com a distribuição *Bootstrap* das estatísticas em consideração, é chamada a subrotina ord, que ordena os de valores em ordem crescente para construir o intervalo percentílico. Na construção do intervalo percentílico BC são chamadas as subrotinas norm e norminv. Ao fim do elo Monte Carlo são calculadas as estatísticas médias e as probabilidades de cobertura do parâmetro nulo para a FAC e FACP. Os programas aqui apresentados estão em linguagem FORTRAN 95.

PROGRAM PRINCIPAL

```
use procs
use variaveis
use Boot
use portlib
external norm
external norminv
implicit none
```

!Dados Iniciais da Simulação

```
write(*,*) "Entre com o numero de repeticoes Monte Carlo"read(*,*) NMC
write(*,*) "Entre com o número de repeticoes Bootstrap"read(*,*) NBS
write(*,*) "Entre com o tamanho da serie temporal"read(*,*) n
write(*,*) "Entre com os parâmetros autoregressivos"read(*,*) BP0, BP1, BP2, BP3
```

!Valores Verdadeiros da FAC e FACP

$$ro(1) = (BP1 + BP2*BP3) / (1.0 - BP2 - BP1*BP3 - BP3**2)$$

$$ro(2) = BP1*ro(1) + BP2 + BP3*ro(1)$$

$$ro(3) = BP1*ro(2) + BP2*ro(1) + BP3$$

$$fi(1) = ro(1)$$

$$fi(2) = (-1.0*BP1*BP3 - BP2) / (BP3**2 - 1.0)$$

$$fi(3) = BP3$$

!Início do Elo Monte Carlo

allocate (z(n))

allocate (RO1CH(NMC), Fi11CH(NMC), RO2CH(NMC), Fi22CH(NMC), RO3CH(NMC),
Fi33CH(NMC), SDRO2CH(NMC), SDRO3CH(NMC))

allocate(z1(500), az(500))

allocate (S1(NMC), S2(NMC), S3(NMC), F1(NMC), F2(NMC), F3(NMC))

allocate (def1((n-1),2), def2((n-2),2), def3((n-3),2))

allocate (RO1B(NBS), RO2B(NBS), RO3B(NBS), Fi11B(NBS), Fi22B(NBS),
Fi33B(NBS))

allocate (RO1BM(NMC),RO2BM(NMC),RO3BM(NMC), Fi11BM(NMC),Fi22BM(NMC),
Fi33BM(NMC))

allocate (AICRO1(NMC), AICRO2(NMC), AICRO3(NMC))

allocate (SB1(NBS), SB2(NBS), SB3(NBS), SB1F(NBS), SB2F(NBS), SB3F(NBS))

allocate (SRO1B(NMC),SRO2B(NMC),SRO3B(NMC), SFi11B(NMC), SFi22B(NMC),
SFi33B(NMC))

contRO1 = 0

contFi11=0

contRO2=0

contFi22=0

contRO3=0

contFi33 = 0

contRO1B = 0

contRO2B = 0

```

contRO2B = 0
contFi11B =0
contFi22B =0
contFi33B =0
contRO1BC =0
contRO2BC =0
contRO3BC =0
contFi11BC =0
contFi22BC =0
contFi33BC =0
ARO1B = 0.0
ARO2B = 0.0
ARO3B = 0.0
AFi11B = 0.0
AFi22B = 0.0
AFi33B = 0.0
ARO1BC = 0.0
ARO2BC = 0.0
ARO3BC = 0.0
AFi11BC = 0.0
AFi22BC = 0.0
AFi33BC = 0.0

```

```

do i = 1, NMC
call Gerar

```

!FAC , FACP , SD, IC

```

!RO1
RO1CH(i)= 0.
do t = 1, n-1
R1 = (z(t) - zb)*(z(t+1) - zb)
RO1CH(i) = RO1CH(i) + R1

```

```

end do
RO1CH(i)= RO1CH(i)/varn
SDRO1CH = sqrt(1.0/n)
LICRO1 = 1.6449* SDRO1CH
AICRO1(i) = 2.0* LICRO1
if ( (RO1CH(i) > -1.0*LICRO1) .and. (RO1CH(i) < LICRO1) ) then
contRO1 = contRO1 + 1
end if

!Fi11
Fi11CH(i) = RO1CH(i)
SDFIKK = sqrt(1.0/n)
LICFIKK = 1.6449* SDFIKK
if ( ( Fi11CH(i) > -1.0*LICFIKK ) .and. ( Fi11CH(i) < LICFIKK ) ) then
contFi11 = contFi11 + 1
end if

!RO2
RO2CH(i) = 0
do t = 1, n-2
R2 = (z(t) - zb)*(z(t+2) - zb)
RO2CH(i) = RO2CH(i) + R2
end do
RO2CH(i)= RO2CH(i)/varn
SDRO2CH(i) = sqrt( 1.0/n * (1.0 + 2.0*RO1CH(i)**2) )
LICRO2 = 1.6449* SDRO2CH(i)
AICRO2(i) = 2* LICRO2
if ( (RO2CH(i) > -1.0*LICRO2) .and. (RO2CH(i) < LICRO2) ) then
contRO2 = contRO2 + 1
end if

!Fi22
Fi22CH(i) = (RO2CH(i) - RO1CH(i)**2)/ (1.0 - RO1CH(i)**2)

```

```

if ( ( Fi22CH(i) > -1.0*LICFIKK ) .and. ( Fi22CH(i) < LICFIKK ) ) then
contFi22 = contFi22 + 1
end if

```

```
!RO3
```

```
RO3CH(i) = 0
```

```
do t = 1, n-3
```

```
R3 = (z(t) - zb)*(z(t+3) - zb)
```

```
RO3CH(i) = RO3CH(i) + R3
```

```
end do
```

```
RO3CH(i) = RO3CH(i)/varn
```

```
SDRO3CH(i) = sqrt( 1.0/n * (1.0+ 2.0*(RO1CH(i)**2+RO2CH(i)**2)) )
```

```
LICRO3 = 1.6449* SDRO3CH(i)
```

```
AICRO3(i) = 2.0* LICRO3
```

```
if ( (RO3CH(i) > -1.0*LICRO3) .and. (RO3CH(i) < LICRO3) ) then
```

```
contRO3 = contRO3 + 1
```

```
end if
```

```
!Fi33
```

```

Fi33CH(i) = (RO3CH(i) + RO1CH(i)*(RO2CH(i)**2) + (RO1CH(i)**3) - 2.0*RO1CH(i)
*RO2CH(i) -1.0*(RO1CH(i)**2)*RO3CH(i) ) / ( 1.0 + 2.0*(RO1CH(i)**2)*RO2CH(i)
- 1.0*(RO2CH(i)**2) -2.0*(RO1CH(i)**2) )

```

```
if ( ( Fi33CH(i) > -1.0*LICFIKK ) .and. ( Fi33CH(i) < LICFIKK ) ) then
```

```
contFi33 = contFi33 + 1
```

```
end if
```

```
call Bootstrap
```

```
RO1BM(i) = sum(RO1B)/NBS
```

```
RO2BM(i) = sum(RO2B)/NBS
```

```
RO3BM(i) = sum(RO3B)/NBS
```

```
Fi11BM(i) = sum(Fi11B)/NBS
```

```
Fi22BM(i) = sum(Fi22B)/NBS
```

```
Fi33BM(i) = sum(Fi33B)/NBS
```

!Desvio padrão das estatísticas Bootstrap

! RO1B

SB1 = 0.0

do l = 1, NBS

SB1(l) = ((RO1B(l) - RO1BM(i))**2)

end do

SRO1B(i) = sqrt(sum(SB1)/(NBS - 1.0))

! RO2B SB2 = 0.0

do l = 1, NBS

SB2(l) = ((RO2B(l) - RO2BM(i))**2)

end do

SRO2B(i) = sqrt(sum(SB2)/(NBS - 1.0))

! RO3B

SB3 = 0.0

do l = 1, NBS

SB3(l) = ((RO3B(l) - RO3BM(i))**2)

end do

SRO3B(i) = sqrt(sum(SB3)/(NBS - 1.0))

! Fi11B

SB1F = 0.0

do l = 1, NBS

SB1F(l) = ((Fi11B(l) - Fi11BM(i))**2)

end do

SFi11B(i) = sqrt(sum(SB1F)/(NBS - 1.0))

! Fi22B

SB2F = 0.0

do l = 1, NBS

SB2F(l) = ((Fi22B(l) - Fi22BM(i))**2)


```

end do
SFi22B(i) = sqrt(sum(SB2F)/(NBS - 1.0))

! Fi33B
SB3F = 0.0
do l = 1, NBS
SB3F(l) = ((Fi33B(l) - Fi33BM(i))**2)
end do
SFi33B(i) = sqrt(sum(SB3F)/(NBS - 1.0))

```

Intervalo Percentílico Bootstrap

```

call ord(RO1B, NBS)
if ( RO1B(11)< 0.0 .and. 0.0 <RO1B(910) ) then
contRO1B = contRO1B + 1
end if
ARO1B = ARO1B + RO1B(910) - RO1B(11)

call ord(RO2B, NBS)
if ( RO2B(11)< 0.0 .and. 0.0 <RO2B(910) ) then
contRO2B = contRO2B + 1
end if
ARO2B = ARO2B + RO2B(910) - RO2B(11)

call ord(RO3B, NBS)
if ( RO3B(11)< 0.0 .and. 0.0 <RO3B(910) ) then
contRO3B = contRO3B + 1
end if
ARO3B = ARO3B + RO3B(910) - RO3B(11)

call ord(Fi11B, NBS)
if ( Fi11B(11)< 0.0 .and. 0.0 <Fi11B(910) ) then
contFi11B = contFi11B + 1
end if

```

$AFi11B = AFi11B + Fi11B(910) - Fi11B(11)$

call ord(Fi22B, NBS)

if (Fi22B(11) < 0.0 .and. 0.0 < Fi22B(910)) then

contFi22B = contFi22B + 1

end if

$AFi22B = AFi22B + Fi22B(910) - Fi22B(11)$

call ord(Fi33B, NBS)

if (Fi33B(11) < 0.0 .and. 0.0 < Fi33B(910)) then

contFi33B = contFi33B + 1

end if

$AFi33B = AFi33B + Fi33B(910) - Fi33B(11)$

!Intervalo Percentílico BC

!RO1

scdf = 0

do l = 1, NBS

if (RO1B(l) <= RO1CH(i)) then

scdf = scdf + 1

end if

end do

$CDF = 1.0 * scdf / NBS$

call norminv (CDF, Zo)

$Zoi = 2 * Zo - 1.644853$

$Zos = 2 * Zo + 1.644853$

call norm (Zoi, CDFI)

call norm (Zos, CDFS)

$cdfi = cdfi * nbs$

$cdfs = cdfs * nbs$

$ibi = \text{int}(cdfi)$

$ibs = \text{int}(cdfs)$

if (RO1B(ibi) <= 0.0 .and. 0.0 <= RO1B(ibs)) then

```

contRO1BC = contRO1BC + 1
end if
ARO1BC = ARO1BC + (RO1B(ibs) - RO1B(ibi))

!RO2
scdf = 0
do l = 1, NBS
  if (RO2B(l) <= RO2CH(i)) then
    scdf = scdf + 1
  end if
end do
CDF = 1.0*scdf/NBS
call norminv (CDF, Zo)
Zoi = 2*Zo - 1.644853
Zos = 2*Zo + 1.644853
call norm (Zoi, CDFI)
call norm (Zos, CDFS)
cdfi = cdfi * nbs
cdfs = cdfs * nbs
ibi = int(cdfi)
ibs = int(cdfs)
if (RO2B(ibi) <= 0.0 .and. 0.0<= RO2B(ibs)) then
  contRO2BC = contRO2BC + 1
end if
ARO2BC = ARO2BC + (RO2B(ibs) - RO2B(ibi))

!RO3
scdf = 0
do l = 1, NBS
  if (RO3B(l) <= RO3CH(i)) then
    scdf = scdf + 1
  end if
end do

```

```

CDF = 1.0*scdf/NBS
call norminv (CDF, Zo)
Zoi = 2*Zo - 1.644853
Zos = 2*Zo + 1.644853
call norm (Zoi, CDFI)
call norm (Zos, CDFS)
cdfi = cdfi * nbs
cdfs = cdfs * nbs
ibi = int(cdfi)
ibs = int(cdfs)
if (RO3B(ibi) <= 0.0 .and. 0.0<= RO3B(ibs)) then
contRO3BC = contRO3BC + 1
end if
ARO3BC = ARO3BC + (RO3B(ibs) - RO3B(ibi))

!Fi11
scdf = 0
do l = 1, NBS
if (Fi11B(l) <= Fi11CH(i)) then
scdf = scdf +1
end if
end do
CDF = 1.0*scdf/NBS
call norminv (CDF, Zo)
Zoi = 2*Zo - 1.644853
Zos = 2*Zo + 1.644853
call norm (Zoi, CDFI)
call norm (Zos, CDFS)
cdfi = cdfi * nbs
cdfs = cdfs * nbs
ibi = int(cdfi)
ibs = int(cdfs)
if (Fi11B(ibi) <= 0.0 .and. 0.0<= Fi11B(ibs)) then

```

```

contFi11BC = contFi11BC + 1
end if
AFi11BC = AFi11BC + (Fi11B(ibs) - Fi11B(ibi))

!Fi22
scdf = 0
do l = 1, NBS
  if (Fi22B(l) <= Fi22CH(i)) then
    scdf = scdf + 1
  end if
end do
CDF = 1.0*scdf/NBS
call norminv (CDF, Zo)
Zoi = 2*Zo - 1.644853
Zos = 2*Zo + 1.644853
call norm (Zoi, CDFI)
call norm (Zos, CDFS)
cdfi = cdfi * nbs
cdfs = cdfs * nbs
ibi = int(cdfi)
ibs = int(cdfs)
if (Fi22B(ibi) <= 0.0 .and. 0.0<= Fi22B(ibs)) then
  contFi22BC = contFi22BC + 1
end if
AFi22BC = AFi22BC + (Fi22B(ibs) - Fi22B(ibi))

!Fi33
scdf = 0
do l = 1, NBS
  if (Fi33B(l) <= Fi33CH(i)) then
    scdf = scdf + 1
  end if
end do

```

```

CDF = 1.0*scdf/NBS
call norminv (CDF, Zo)
Zoi = 2*Zo - 1.644853
Zos = 2*Zo + 1.644853
call norm (Zoi, CDFI)
call norm (Zos, CDFS)
cdfi = cdfi * nbs
cdfs = cdfs * nbs
ibi = int(cdfi)
ibs = int(cdfs)
if (Fi33B(ibi) <= 0.0 .and. 0.0<= Fi33B(ibs)) then
contFi33BC = contFi33BC + 1
end if
AFi33BC = AFi33BC + (Fi33B(ibs) - Fi33B(ibi))

end do

```

! Fim do Elo Monte Carlo

! Estatísticas Médias

```

RO1CHM = sum(RO1CH)/NMC
RO2CHM = sum(RO2CH)/NMC
RO3CHM = sum(RO3CH)/NMC
Fi11CHM = sum(Fi11CH)/NMC
Fi22CHM = sum(Fi22CH)/NMC
Fi33CHM = sum(Fi33CH)/NMC
SDRO1CH = sqrt(1.0/n)
SDRO2CHM = sum(SDRO2CH)/NMC
SDRO3CHM = sum(SDRO3CH)/NMC
SDFIKK = sqrt(1.0/n)
AICRO1M = sum(AICRO1)/NMC
AICRO2M = sum(AICRO2)/NMC
AICRO3M = sum(AICRO3)/NMC

```

```

AICFIKK = 2.0*LICFIKK
RO1BMM = sum(RO1BM)/NMC
RO2BMM = sum(RO2BM)/NMC
RO3BMM = sum(RO3BM)/NMC
Fi11BMM = sum(Fi11BM)/NMC
Fi22BMM = sum(Fi22BM)/NMC
Fi33BMM = sum(Fi33BM)/NMC
SRO1BM = sum(SRO1B)/NMC
SRO2BM = sum(SRO2B)/NMC
SRO3BM = sum(SRO3B)/NMC
SFi11BM = sum(SFi11B)/NMC
SFi22BM = sum(SFi22B)/NMC
SFi33BM = sum(SFi33B)/NMC
AMRO1B = ARO1B/NMC
AMRO2B = ARO2B/NMC
AMRO3B = ARO3B/NMC
AMFi11B = AFi11B/NMC
AMFi22B = AFi22B/NMC
AMFi33B = AFi33B/NMC
AMRO1BC = ARO1BC/NMC
AMRO2BC = ARO2BC/NMC
AMRO3BC = ARO3BC/NMC
AMFi11BC = AFi11BC/NMC
AMFi22BC = AFi22BC/NMC
AMFi33BC = AFi33BC/NMC

```

! Desvio padrão das estatísticas médias clássicas nas replicações

Monte Carlo

```

! RO1CHM
do i = 1, NMC
  S1(i) = ((RO1CH(i) - RO1CHM)**2)
end do

```

```
SRO1 = sqrt(sum(S1)/(NMC - 1.0))
```

```
! RO2CHM
```

```
do i = 1, NMC
```

```
S2(i) = ((RO2CH(i) - RO2CHM)**2)
```

```
end do
```

```
SRO2 = sqrt(sum(S2)/(NMC - 1.0))
```

```
! RO3CHM
```

```
do i = 1, NMC
```

```
S3(i) = ((RO3CH(i) - RO3CHM)**2)
```

```
end do
```

```
SRO3 = sqrt(sum(S3)/(NMC - 1.0))
```

```
!Fi11CHM
```

```
do i = 1, NMC
```

```
F1(i) = ((Fi11CH(i) - Fi11CHM)**2)
```

```
end do
```

```
SFi11 = sqrt(sum(F1)/(NMC - 1.0))
```

```
!Fi22CHM
```

```
do i = 1, NMC
```

```
F2(i) = ((Fi22CH(i) - Fi22CHM)**2)
```

```
end do
```

```
SFi22 = sqrt(sum(F2)/(NMC - 1.0))
```

```
!Fi33CHM
```

```
do i = 1, NMC
```

```
F3(i) = ((Fi33CH(i) - Fi33CHM)**2)
```

```
end do
```

```
SFi33 = sqrt(sum(F3)/(NMC - 1.0))
```

! Probabilidade de Cobertura dos Intervalos Clássicos

```
PRO1 = 1.0*contRO1/NMC
```


$PRO2 = 1.0 * contRO2 / NMC$

$PRO3 = 1.0 * contRO3 / NMC$

$PFi11 = 1.0 * contFi11 / NMC$

$PFi22 = 1.0 * contFi22 / NMC$

$PFi33 = 1.0 * contFi33 / NMC$

! Probabilidade de Cobertura do Intervalo Bootstrap Percentílico

$PRO1B = 1.0 * contRO1B / NMC$

$PRO2B = 1.0 * contRO2B / NMC$

$PRO3B = 1.0 * contRO3B / NMC$

$PFi11B = 1.0 * contFi11B / NMC$

$PFi22B = 1.0 * contFi22B / NMC$

$PFi33B = 1.0 * contFi33B / NMC$

! Probabilidade de Cobertura do Intervalo Bootstrap Percentílico BC

$PRO1BC = 1.0 * contRO1BC / NMC$

$PRO2BC = 1.0 * contRO2BC / NMC$

$PRO3BC = 1.0 * contRO3BC / NMC$

$PFi11BC = 1.0 * contFi11BC / NMC$

$PFi22BC = 1.0 * contFi22BC / NMC$

$PFi33BC = 1.0 * contFi33BC / NMC$

`open(1,file="teste15.txt")`

`write(1,*) "Parâmetros Fi1 = 0,125 Fi2 = 0,2 Fi3 = 0,2 Região de Quase Ruído Branco"`

`write(1,*)`

`write(1,*) "Valores verdadeiros da FAC e FACP"`

`write(1,*) "RO", RO`

`write(1,*) "FI", FI`

`write(1,*)`

`write(1,*) "Estimativas Clássicas"`

```
write(1,*)
write(1,*) "RO1CHM", RO1CHM
write(1,*) "RO2CHM", RO2CHM
write(1,*) "RO3CHM", RO3CHM
write(1,*) "Fi11CHM", Fi11CHM
write(1,*) "Fi22CHM", Fi22CHM
write(1,*) "Fi33CHM", Fi33CHM
write(1,*)
write(1,*) "Estimativas Bootstrap"
write(1,*) "RO1BMM", RO1BMM
write(1,*) "RO2BMM", RO2BMM
write(1,*) "RO3BMM", RO3BMM
write(1,*) "Fi11BMM", Fi11BMM
write(1,*) "Fi22BMM", Fi22BMM
write(1,*) "Fi33BMM", Fi33BMM
write(1,*) "Erro Padrão das Estimativas Clássicas pela expressão de Barlett"
write(1,*) "SDRO1CH", SDRO1CH
write(1,*) "SDRO2CHM", SDRO2CHM
write(1,*) "SDRO3CHM", SDRO3CHM
write(1,*)
write(1,*) "SDFIKK", SDFIKK
write(1,*)
write(1,*) "Desvio Padrão das Estimativas Clássicas das 100 estimativas Monte Carlo"
write(1,*)
write(1,*) "SRO1", SRO1
write(1,*) "SRO2", SRO2
write(1,*) "SRO3", SRO3
write(1,*) "SFi11", SFi11
write(1,*) "SFi22", SFi22
write(1,*) "SFi33", SFi33
write(1,*)
```

```

write(1,*) "Desvio Padrão das Estimativas Bootstrap"
write(1,*) "SRO1BM ", SRO1BM
write(1,*) "SRO2BM ", SRO2BM
write(1,*) "SRO3BM ", SRO3BM
write(1,*) "SFi11BM ", SFi11BM
write(1,*) "SFi22BM ", SFi22BM
write(1,*) "SFi33BM ", SFi33BM
write(1,*)
write(1,*) "Intervalos clássicos"
write(1,*) "AICRO1M", AICRO1M
write(1,*) "AICRO2M", AICRO2M
write(1,*) "AICRO3M", AICRO3M
write(1,*) "AICFIKK", AICFIKK
write(1,*) "PRO1", PRO1
write(1,*) "PRO2", PRO2
write(1,*) "PRO3", PRO3
write(1,*) "PFi11", PFi11
write(1,*) "PFi22", PFi22
write(1,*) "PFi33", PFi33
write(1,*)
write(1,*) "Intervalos Boot"
write(1,*) "PRO1B", PRO1B
write(1,*) "PRO2B", PRO2B
write(1,*) "PRO3B", PRO3B
write(1,*) "PFi11B", PFi11B
write(1,*) "PFi22B", PFi22B
write(1,*) "PFi33B", PFi33B
write(1,*)
write(1,*) "AMRO1B", AMRO1B
write(1,*) "AMRO2B", AMRO2B
write(1,*) "AMRO3B", AMRO3B
write(1,*) "AMFi11B", AMFi11B

```

```

write(1,*) "AMFi22B", AMFi22B
write(1,*) "AMFi33B", AMFi33B
write(1,*)
write(1,*) "Intervalos Boot BC"
write(1,*) "PRO1BC", PRO1BC
write(1,*) "PRO2BC", PRO2BC
write(1,*) "PRO3BC", PRO3BC
write(1,*) "PFi11BC", PFi11BC
write(1,*) "PFi22BC", PFi22BC
write(1,*) "PFi33BC", PFi33BC
write(1,*)
write(1,*)
write(1,*) "AMRO1BC", AMRO1BC
write(1,*) "AMRO2BC", AMRO2BC
write(1,*) "AMRO3BC", AMRO3BC
write(1,*) "AMFi11BC", AMFi11BC
write(1,*) "AMFi22BC", AMFi22BC
write(1,*) "AMFi33BC", AMFi33BC

close(1)
ver = system("notepad teste8.txt")

```

!Subrotina que ordena os vetores em ordem crescente

```

contains
subroutine ord(v, n) integer:: i,j,n
real:: maior
real, dimension(n) :: v
do i = 1, (n-1)
do j = i+1, n
if (v(j) <= v(i)) then
maior = v(i)
v(i) = v(j)

```

```
v(j) = maior  
end if  
end do  
end do  
end subroutine
```

```
END PROGRAM PRINCIPAL
```

MODULE BOOT

```
use variaveis
```

```
use procs
```

```
implicit none
```

```
contains
```

subroutine Bootstrap

```
do l = 1, NBS
```

```
call random seed()
```

```
! Estatísticas Bootstrap Def 1
```

```
!forma a amostra de pares de defasagem 1
```

```
do j = 1, (n-1)
```

```
call random number(x)
```

```
x=ceiling(x*(n-1))
```

```
x=int(x)
```

```
def1 (j,1) = Z(x)
```

```
def1 (j,2) = Z(x +1)
```

```
end do
```

```
!media da amostra de pares
```

```
S = 0.0
```

```
do j = 1,(n-1)
```

```
S = S + def1(j,1)
```

```
end do
```

```
zb1 = ( S + def1((n-1),2) ) / (1.0*n)
```

```
!variancia da amostra de pares
```

```
varbn = 0.0
```

```
do j= 1, (n-1)
```

```
v = (def1(j,1) - zb1)**2
```

```
varbn = varbn + v
```

```
end do
```

```
varbn = varbn + (def1((n-1),2) - zb1)**2
```

! Estimativas Bootstrap

RO1B(l) = 0.0

do j = 1, (n-1)

B1 = (def1(j,1) - zb1)*(def1(j,2) - zb1)

RO1B(l) = RO1B(l) + B1

end do

RO1B(l) = RO1B(l)/ varbn

Fi11B(l) = RO1B(l)

! Estatísticas Bootstrap Def 2

!forma a amostra de pares de defasagem 2

do j = 1, (n-2)

call random number(x)

x=ceiling(x*(n-2))

x=int(x)

def2 (j,1) = Z(x)

def2 (j,2) = Z(x +2)

end do

!media da amostra de pares

S = 0.0

do j = 1,(n-2)

S = S + def2(j,1)

end do

zb2 = (S + def2((n-3),2)+ def2((n-2),2)) / (1.0*n)

!variancia da amostra de pares

varbn = 0.0

do j= 1, (n-2)

v2 = (def2(j,1) - zb2)**2

varbn = varbn + v2

end do

varbn = varbn + (def2((n-3),2) - zb2)**2 + (def2((n-2),2) - zb2)**2

! Estimativas Bootstrap

```

RO2B(l) = 0.0
B2 = 0.0
do j = 1, (n-2)
  B2 = (def2(j,1) - zb2)*(def2(j,2) - zb2)
  RO2B(l) = RO2B(l) + B2
end do
RO2B(l) = RO2B(l)/ varbn
Fi22B(l) = 0.0
Fi22B(l) = (RO2B(l) - RO1B(l)**2) / (1.0 - RO1B(l)**2)

```

! Estatísticas Bootstrap Def 3

!forma a amostra de pares de defasagem 3

```

do j = 1, (n-3)
  call random number(x)
  x=ceiling(x*(n-3))
  x=int(x)
  def3 (j,1) = Z(x)
  def3 (j,2) = Z(x +3)
end do
!media da amostra de pares
S = 0.0
do j = 1,(n-3)
  S = S + def3(j,1)
end do
zb3 = ( S + def3((n-5),2)+ def3((n-4),2) +def3((n-3),2) ) / (1.0*n)
!variancia da amostra de pares
varbn = 0.0
do j= 1, (n-3)
  v3 = (def3(j,1) - zb3)**2
  varbn = varbn + v3
end do
varbn = varbn + (def3((n-5),2) - zb3)**2 + (def3((n-4),2) - zb3)**2 + (def3((n-3),2) -

```


zb3)**2

! Estimativas Bootstrap

RO3B(l) = 0.0

B3 = 0.0

do j = 1, (n-3)

B3 = (def3(j,1) - zb3)*(def3(j,2) - zb3)

RO3B(l) = RO3B(l) + B3

end do

RO3B(l) = RO3B(l)/varbn

Fi33B(l) = 0.0

Fi33B(l) = (RO3B(l) + RO1B(l)*(RO2B(l)**2) + (RO1B(l)**3) -2.0*RO1B(l)
 RO2B(l) -1.0(RO1B(l)**2)*RO3B(l)) / (1.0 + 2.0*(RO1B(l))**2 *RO2B(l)
 - 1.0*(RO2B(l)**2) -2.0*(RO1B(l)**2))

end do

end subroutine

end MODULE BOOT

Module PROCS

```
use portlib
use variaveis
implicit none
contains
```

Subroutine Gerar

```
pi=acos(-1.0)
! Gera o resíduo AZ(8) AZ(9) e AZ(10) com distribuição N(0,1)
```

```
call random number(u9)
call random number(u10)
uz10=sqrt(-2.0*log(u9))*sin(2.0*pi*u10)
az(10)=sqrt(0.1)*uz10
call random number(u9)
call random number(u10)
uz9=sqrt(-2.0*log(u9))*cos(2.0*pi*u10)
az(9)=sqrt(0.1)*uz9
call random number(u9)
call random number(u10)
uz8=sqrt(-2.0*log(u9))*sin(2.0*pi*u10)
az(8)=sqrt(0.1)*uz8
```

```
! Gera os valores da S. T. Z1(7), Z1(8), Z1(9) e Z1(10)
```

```
call random number(u9)
call random number(u10)
z1(7)=sqrt(-2.0*log(u9))*sin(2.0*pi*u10)
call random number(u9)
call random number(u10)
z1(8)=sqrt(-2.0*log(u9))*sin(2.0*pi*u10)
call random number(u9)
call random number(u10)
z1(9)=sqrt(-2.0*log(u9))*cos(2.0*pi*u10)
```

```

z1(10)= bp0+ bp1*z1(9)+bp2*z1(8)+bp3*z1(7)+az(10)
do t=11, 100+n
call random number(u9)
call random number(u10)
az(t)= sqrt(-2.0*log(u9))*cos(2.0*pi*u10)
az(t)=sqrt(0.1)*az(t)
z1(t)= bp1*z1(t-1)+bp2*z1(t-2)+bp3*z1(t-3)+az(t)-1.0*bp4*
az(t-1) -1.0*bp5*az(t-2)-1.0*bp6*az(t-3)
end do
do t=101, 100+n
in=t-100
z(in)=z1(t)
end do
zb = sum(z)/n
varn = 0
do t= 1, n
var= (z(t) - zb)**2
varn = varn + var
end do
end subroutine Gerar

end MODULE PROCS

```

!Calcula a área sob a curva normal

!algoritmo de Moran(1990)

subroutine norm (Zn, A)

implicit none

real:: Zn, A,aux1, aux2, S, aux3, aux4, absz, i

absz = abs(Zn)

aux1 = Zn

aux2 = sqrt(2.0)*aux1/3.0

S= 0.0

do i = 0, 12

aux3 = i +0.5

S = S + sin(aux2*aux3)*exp(-aux3*aux3/9.0)/aux3

end do

aux4 = 0.5 + S/3.1415926536

!if (Zn >= 0.0) then

A = aux4

!else

!A = 1.0 - 1.0*aux4

!end if

if (absz >= 10.0) A = 1.0

if (absz == 0.0) A = 0.0

end subroutine

! Calcula o valor de Z dada a área da N(0,1)

!Algoritmo de Bealsley e Springer (1977)

subroutine norminv (A, Zn)

implicit none

real :: A, A0, A1, A2, A3, B1, B2, B3, B4, C0, C1, C2, C3, D1,

D2, Zn, aq, absaq, aq2, aux, rq

A0 = 2.50662823884

A1 = -18.61500062529

A2 = 41.39119773534

A3 = -25.44106049637

B1 = -8.47351093090

B2 = 23.08336743743

B3 = -21.06224101826

B4 = 3.13082909833

C0 = -2.78718931138

C1 = -2.29796479134

C2 = 4.85014127135

C3 = 2.32121276858

D1 = 3.54388924762

D2 = 1.63706781897

if ((A>0.0) .and. (A<1.0)) then

aq = A - 0.5

absaq = abs(aq)

end if

if (absaq <= 0.42) then

aq2= aq*aq

aux = aq*(((a3*aq2+a2)*aq2+a1)*aq2+ a0)

zn= aux/((((b4*aq2+b3)*aq2+b2)*aq2+b1)*aq2+1.0)

else

if (aq<=0.0) rq = sqrt(-1.0*log(A))

if (aq>0.0) rq = sqrt(-1.0*log(1.0-A))

aux = (((c3*rq+c2)*rq+c1)*rq+c0)

```
aux = aux/((d2*rq+d1)*rq+1.0)
if (aq>=0.0) zn= aux
if (aq<0.0) zn=-1.0*aux
end if
if (A == 0.5) zn = 0.0
if (A == 0.0) zn = -1.0*10**10
if (A == 1.0) zn = +1.0*10**10

end subroutine norminv
```

MODULE VARIÁVEIS

```

integer:: NMC, NBS, N, K, i, t, in , ver, l, j, contRO1,contFi11,
contRO2, contFi22, contRO3, contFi33,contRO4,contFi44, contRO1B,
contRO2B, contRO3B, contRO4B, contFi11B, contFi22B, contFi33B,
contFi44B, scdf, ibi, ibs, contRO1BC,contRO2BC,contRO3BC,
contRO4BC, contFi11BC,contFi22BC, contFi33BC, contFi44BC
real:: u9, u10,uz8, uz9, uz10, pi, var, varn
real:: BP0, BP1, BP2, BP3,BP4,BP5,BP6, zb, R1, R2, R3,
R4, RO1CHM, RO2CHM, RO3CHM, RO4CHM, Fi11CHM, Fi22CHM,
Fi33CHM,Fi44CHM, SDRO1CH, SDRO2CHM, SDRO3CHM,SDRO4CHM, SDFIKK
real:: LICRO1, LICRO2, LICRO3,LICRO4, LICFIKK,AICRO1M,
AICRO2M,AICRO3M,AICRO4M, AICFIKK, PRO1,PRO2,PRO3, PRO4,
PFI11, PFI22, PFI33,PFI44, SRO1, SRO2, SRO3,SRO4, SFI11,
SFI22, SFI33,SFI44, PRO1B, PRO2B, PRO3B, PRO4B, PFI11B,
PFI22B, PFI33B, PFI44B, PRO1BC, PRO2BC, PRO3BC, PRO4BC,
PFI11BC, PFI22BC, PFI33BC,PFI44BC
real, dimension(4) :: RO, FI, RHO, PHI
real, dimension(:), allocatable :: z, z1, az, RO1CH,
Fi11CH, RO2CH, Fi22CH, RO3CH, Fi33CH,RO4CH, Fi44CH,
SDRO2CH, SDRO3CH,SDRO4CH, S1, S2, S3,S4, F1,F2,F3,F4
real, dimension(:), allocatable :: AICRO1, AICRO2,
AICRO3, AICRO4, SB1, SB2, SB3,SB4, SB1F, SB2F, SB3F, SB4F
real, dimension(:), allocatable :: RO1B, RO2B, RO3B,
RO4B, Fi11B, Fi22B, Fi33B, Fi44B
real, dimension(:), allocatable ::RO1BM,RO2BM,RO3BM,
RO4BM, Fi11BM, Fi22BM, Fi33BM, Fi44BM
real, dimension(:), allocatable :: SRO1B, SRO2B, SRO3B,
SRO4B, SFI11B, SFI22B, SFI33B, SFI44B
real :: x , B1, B2,B3, B4
real, allocatable, dimension(:, :) :: def1, def2, def3, def4
real :: RO1BMM, RO2BMM, RO3BMM,RO4BMM, Fi11BMM ,Fi22BMM,
Fi33BMM, Fi44BMM, SRO1BM, SRO2BM,

```

```
SRO3BM, SRO4BM, SFi11BM, SFi22BM, SFi33BM, SFi44BM
real :: CDF, Zo, CDFI, CDFS, Zoi, Zos
real :: ARO1B, ARO2B, ARO3B, ARO4B, AFi11B, AFi22B,
AFi33B, AFi44B, AMRO1B, AMRO2B, AMRO3B,
AMRO4B, AMFi11B, AMFi22B, AMFi33B, AMFi44B
real :: ARO1BC, ARO2BC, ARO3BC, ARO4BC, AFi11BC,
AFi22BC, AFi33BC, AFi44BC, AMRO1BC, AMRO2BC,
AMRO3BC, AMRO4BC, AMFi11BC, AMFi22BC, AMFi33BC, AMFi44BC

end MODULE VARIAVEIS
```


REFERÊNCIAS

- ANDERSON, R. Distribution of serial correlation coefficient. **Annals of Mathematics Statistics**, n. 13, p. 1–13, 1942.
- BARTLETT, M. S. On the theoretical specification and sampling properties of autocorrelated time-series. **Journal of the Royal Statistical Society**, B8, n. 27, p. 27–41, 1946.
- BEGUIN, J.-M. Identification of a mixed autoregressive-moving average process : the corner method. **Time series : proceedings of the international conference held at Nottingham University, March 1979.**, p. 423,436, 1980.
- BOX, G. E. P.; JENKINS, G. **Time Series Analysis Forecasting and Control**. New Jersey: Holen Day, 1976.
- BOX, G. E. P.; JENKINS, G.; REINSEL, G. C. **Time Series Analysis**. New Jersey: Prentice Hall, 1994.
- BOX, G. E. P.; PIERCE, D. A. Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models. **Journal of the american statistical association**, n. 64, p. 1509–1526, 1970.
- CAVALIERE, G.; TAYLOR, R. Bootstrap unit root tests for time series with nonstationary volatility. **Econometric Theory**, n. 24, p. 43–71, 2008.
- CHATTERJEE, S. Bootstrapping arma models: Some simulations. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetic**, SMC 16, n. 2, p. 294–297, 1986.
- CHAVES, A. N. **Bootstrap em Séries Temporais**. Tese (Doutorado) — PUC, Rio de Janeiro, 1991.
- CHOI, B. S. **Identification of ARMA Models**. New York: Springer, 1992.
- COSKUN, A. *et al.* The comparison of parametric and nonparametric bootstrap methods for reference interval computation in small sample size groups. **Accred Qual Assur**, n. 18, p. 51–60, 2013.
- DAVISON, A.; HINKELEY, D. V. **Bootstrap methods and their application**. Australia: Cambridge, 1997.
- EFRON, B. Bootstrap methods: another look at jackknife. **Annals of Statistics**, v. 7, n. 1, p. 1–26, 1979.
- EFRON, B. **The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans**. USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1982.
- EFRON, B. Bootstrap methods for standart errors confidence intervals and other measures of estatistics accuracy. **Statistical Science**, v. 1, n. 1, p. 54–77, 1986.

EFRON, B. Better bootstrap confidence intervals. **Journal of the American Statistical Association**, v. 82, n. 397, p. 171–200, 1987.

EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. **An Introduction to the Bootstrap**. London: Chapman and Hall, 1993.

FISHER, R. **On the mathematical foundations of theoretical statistics**. New York: John Wiley and Sons, 1950.

FREEDMAN, D.; PETERS, S. C. Bootstrapping an econometric model: Some empirical results. **Journal of Business and Economic Statistics**, v. 2, n. 2, 1984.

GUERRERO, V. M. Time series analysis supported by power transformations. **Journal of Forecasting**, n. 12, p. 37–48, 1993.

HANNAN, E. J.; RISSANEN, J. Recursive estimation of mixed autoregressive-moving average order. **Biometrika**, v. 69, n. 1, p. 81–94, 1982.

HANSEN, B. Regression with nonstationary volatility. **Econometrica**, n. 63, p. 1113–1132, 1995.

KOREISHA, S.; PUKKILA, T. A generalized least-squares approach for estimation of autoregressive moving-average models. **Journal of Time Series Analysis**, v. 11, n. 2, p. 139–151, 1990.

LJUNG, G. M.; BOX, G. E. P. The likelihood function of stationary autoregressive-moving average models. **Biometrika**, n. 66, p. 265–270, 1979.

MACHADO, M. A. S.; SOUZA, R. C. Box & jenkins model identification: A comparison of methodologies. **Independent Journal of Management & Production**, v. 3, n. 2, p. 54–61, 2012.

MARQUARDT, D. W. An algorithm for least-square estimation of nonlinear parameters. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, n. 8, p. 75–80, 1949.

MILLS, T. C. **Time series techniques for economist**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

MINERVA, T.; POLI, I. Applications of evolutionary computing. In: _____. [S.l.]: Springer, 2001. cap. Building ARMA Models with Genetic Algorithms, p. 335–342.

MORETTIN, P.; TOLOI, C. M. C. **Análise de Séries Temporais**. São Paulo: Blucher, 2006.

ONG, C.-S.; HUANG, J.-J.; TZENG, G.-H. Model identification of arima family using genetic algorithms. **Applied Mathematics and Computation**, v. 164, n. 3, p. 885 – 912, 2005.

PAPARODITIS, E.; STREITBERG, B. Order identification statistics in stationary autoregressive moving-average models: vector autocorrelations and the bootstrap. **Journal of Time Series Analysis**, v. 13, n. 5, p. 415–434, 1992.

PASCUALA, L.; ROMOB, J.; RUIZ, E. Bootstrap prediction intervals for power-transformed time series. **International Journal of Forecasting**, n. 21, p. 219–235, 2005.

QUENOUILLE, M. H. Aproximate tests of correlation in time-series. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, n. 8, p. 75–80, 1949.

RAMOS, A.; HO, L. Procedimentos inferenciais em Índices de capacidade para dados autocorrelacionados via bootstrap. **Revista Produção**, v. 13, n. 3, p. 50–62, 2003.

ROLF, S.; SPRAVE, J.; W., U. Model identification and parameter estimation of arma models by means evolutionary algorithms. **Proceedings of the IEEE/IAFE 1 997 Computational Intelligence for Financial Engineering (CIFEr)**, p. 237–243, 1997.

SENSIER, M.; DIJK, D. V. Testing for volatility changes in u.s. macroeconomic time series. **Review of Economics and Statistics**, n. 86, p. 833–839, 2004.

SILVA, D. **O método Bootstrap e aplicações a regressão múltipla**. Tese (Doutorado) — Unicamp, Campinas, 1995.

TSAY, R. S.; TIAO, G. C. Consistent estimates of autoregressive parameters and extended sample autocorrelation function for stationary and nonstationary arma models. **Journal of the American Statistical Association**, v. 79, p. 84 – 96, 1984.

TSAY, R. S.; TIAO, G. C. Use of canonical analysis in time series model identification. **Biometrika**, v. 72, n. 2, p. 299–315, 1985.

TUKEY, J. W. On the comparative anatomy of transformations. **Annals of Mathematical Statistics**, n. 28, p. 602– 632, 1957.

WOLD, H. **A study in the analyses of stationary time series**. Stockholm: Almqvist e Wiksell, 1938.

YULE, G. Why do we sometimes get nonsense-correlations between times series? a study in sampling and the nature time series. **SIAM Journal**, n. 2, p. 229–239, 1963.